Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) — **Année universitaire**
Département de mathématiques – L3 ESR — **2017-2018**
U.E. Analyse Numérique

Feuille de TD 2 : Analyse numérique matricielle

Exercice 1. (Matrices triangulaires. . .)

1. Montrer que le produit de deux matrices carrées triangulaires inférieures de même ordre est triangulaire inférieur.
2. Soit L une matrice carrée triangulaire inférieure inversible. Montrer que son inverse L^{-1} est elle aussi triangulaire inférieure.
3. Soit une matrice carrée A admettant une décomposition LU où L est triangulaire inférieure à diagonale unité. Montrer qu'une telle décomposition est unique.

Exercice 2. (Décomposition LU)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

1. En utilisation la méthode d'élimination de Gauss, calculer la décomposition LU de A.
2. Retrouver cette décomposition en la cherchant sous forme indéterminée.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On suppose que A admet une décomposition LU, donner une formule permettant de calculer les coefficients de L et U.
4. En déduire un algorithme de calcul général de L et U.
5. Supposons maintenant que la matrice A soit tridiagonale inversible ($a_{i-1,i} = a_i,\ a_{i,i} = b_i,\ a_{i,i+1} = c_i$). Que peut-on dire de la décomposition LU de A ?
   Application : effectuer la décomposition LU de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (Matrices symétriques définies positives)
On rappelle que toute matrice réelle symétrique $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $X_1, \cdots, X_N$ tels que $AX_i = \lambda_i X_i$ et $X_i^t X_j = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \cdots, N\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique définie positive. Montrer que les éléments diagonaux de A sont strictement positifs.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique définie positive. Montrer que l'on peut définir une unique matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Exercice 4. (Décomposition LL^t)
Montrer que la matrice suivante est symétrique définie positive et donner sa factorisation de Cholesky.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. (Décomposition LL^t et LDL^t)
On dit qu'une matrice A admet une décomposition LDL^t lorsque $A = LDL^t$ avec L une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et D une matrice diagonale.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ symétrique définie positive admet une décomposition LDL^t. En déduire une preuve de l'existence d'une décomposition de Cholesky pour une matrice réelle symétrique définie positive.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une décomposition LL^t de A ? Donner une décomposition LDL^t de A.
3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet elle une décompostion LDL^t ?