Exercices de topologie.

Exercice 1 a) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle unité $\mathbb{S}^1$.
b) Montrer que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est homéomorphe au tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exercice 2 1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que $A \subset X$ est d'intérieur vide si et seulement si $X \setminus A$ est dense dans X.
2. Montrer que l'intersection deux deux ouverts denses est encore un ouvert dense.

Exercice 3 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que X est séparé si et seulement si la diagonale de $X \times X$ est fermée dans $X \times X$.

Exercice 4 Soit (E, d) un espace métrique , on pose $d'(x, y) = min(1, d)$ et $d" = d/(1 + d)$.
1. Montrer que d' et $d"$ sont des distances sur E et que d' est uniformément équivalente à d.
2. Montrer que d' et $d"$ sont Lipschitz-équivalentes.
3. En déduire que $d"$ est uniformément équivalente à d.

Exercice 5 Montrer que la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ est homéomorphe au recollement de deux disques fermés le long de leur bord.

Exercice 6 Soit E un ensemble qu'on munit de la distance discrète : $\delta(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $\delta(x, x) = 0$. Quels sont les ouverts et les fermés ? A quelle condition nécessaire et suffisante une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente dans (E, δ) ?

Exercice 7 Soit $(G, +)$ un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$. On note $\alpha = \inf\big(G \cap \mathbb{R}_+^*\big)$.
1) Montrer que si $\alpha > 0$ alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.
2) Montrer que si $\alpha = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
3) Décrire les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.
4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 8 Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 9 Soit (E, d) un espace ultramétrique, c'est-à-dire tel que la distance d vérifie la propriété suivante (plus forte que l'inégalité triangulaire) : $d(x, z) \leqslant max(d(x, y), d(y, z))$.
1. Soient $x, y, z \in E$. Montrer qu'au moins deux des trois nombres $d(x, y), d(y, z), d(z, x)$ sont égaux. Autrement dit : tout triangle est isocèle.
2. Montrer que $\forall r > d(x, y)$, $B(x, r) = B(y, r)$. Autrement dit : tout point d'une boule est centre de cette boule.
3. En déduire que deux boules sont soit incluses l'une dans l'autre, soit disjointes.
4. Montrer que les boules $B(x, r)$ sont à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 10 Soit $X = \{0, 1/n \mid n > 1\}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$.
1) Décrire les ouverts de X.
2) Soit $f : \mathbb{N} \to X$ définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = 1/n$.
Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{N}$ vers X continue.
3) Montrer que f n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{N}$ vers X.