Université Paul Sabatier 2016-2017
L3 ESR Intégration et probabilités

TD2

1. Soit U une v.a. uniforme sur $[0,1]$

   (a) En passant par la fonction de répartition, montrer que la loi de $X = -\ln(U)$ est à densité que l'on déterminera.

   Pour g croissante, on définit son inverse généralisé $g^{<-1>}(u) = \inf\{x \text{ tel que } g(x) \geq u\}$.

   (b) Montrer que si g est bijective $[a,b] \to [g(a), g(b)]$ alors $g^{<-1>} = g^{-1}$ sur $[g(a), g(b)]$.

   (c) Soit F la fonction de répartition d'une loi P^*. Quelle est la loi de $F^{<-1>}(U)$?

   (d) A quel détail près retrouve-t-on le résultat du 1a ?

   (e) Vérifier encore le résultat en déterminant $F^{<-1>}$ pour la loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Soit une suite indépendante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. uniformes sur $[0,1]$.
   Montrer que $M_n = \max\limits_{1\leq k\leq n} X_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ p.s.

3. Soit (X_n) une suite de v.a. telle que

$$\forall\epsilon > 0, \qquad \sum^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty.$$

   Montrer que $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ p.s.
   On pourra noter $C_\epsilon = (\exists N, n \geq N \Rightarrow |X_n| \leq \epsilon)$.

4. Soit X et N deux v.a. indépendantes de lois respective $\exp(1)$ et poisson(1). Déterminer la densité de $X/(N+1)$ comme en 1a.

5. Soit X une v.a. de densité f.

   (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ quelle est la loi de $aX + b$?

   (b) Quelle est la loi de X^2 ?

   On explicitera à chaque fois les densités.