TD2

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Exprimer la loi de $\min\{X, 2\}$ sous forme d'une combinaison de mesure de Dirac et de mesure admettant une densité.
   (b) Calculer $\mathrm{E}\big(\min\{X, 2\}\big)$.
   (c) Calculer la densité de $\dfrac{X}{Y}$.
   (d) Calculer la densité de $\dfrac{X}{X+Y}$.
   (e) Déterminer la loi de la partie entière de X.

2. Soit X et N deux v.a. indépendantes, $X \sim \mathrm{unif}[-1, 1]$ et $N \sim \mathrm{Poisson}(1)$.
   Calculer $\mathrm{E}(X^N)$.

3. Soit X une v.a. de densité f.
   (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ quelle est la loi de $aX + b$?
   (b) Quelle est la loi de X^2 ?

   On explicitera à chaque fois les densités.

4. Soit X et Y deux v.a. indépendantes, $X \sim \mathrm{unif}[0, 1/\lambda]$ et $Y \sim \exp(\lambda)$.
   Calculer $\mathrm{P}(X \geq Y)$.

5. Soit $X \sim \exp(1)$.
   Quelle est la loi de (N, U) où N et U sont les parties entières et décimales de X ?

6. La fonction de répartition d'une v.a. X est $F^X(t) = \mathrm{P}(X \leq t)$.
   (a) Justifier pourquoi elle caractérise la loi ($F^X = F^Y \Rightarrow \mathrm{P}^X = \mathrm{P}^Y$).
   (b) Tracer F^X pour $\mathrm{P}^X = \delta_0$, montrer en général que F^X est continue à droite.
   Que vaut $F^X(t) - \lim\limits_{s \to t, s<t} F^X(s)$?
   (c) Soit dorénavant $F^X(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$.
   Déterminer la densité de $Y = e^{-X}$.
   (d) Soit $Z = X 1_{1<X}$. Tracer F^X et F^Z. Décrire P^Z sous forme d'une combinaison de mesure de Dirac et de mesure admettant une densité.

7. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et sa fonction caractéristique $\phi(t) = \mathrm{E}(e^{itX})$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Etablir une équation différentielle entre ϕ' et ϕ.
   (b) En déduire $\phi(t)$.