Partie 1 : Combinatoire

Feuille 3 : principe des tiroirs et principe d'inclusion-exclusion (PIE)

Exercice 1 : On considère la suite

$$9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999,\ \ldots$$

Montrer que l'on peut trouver un terme dans cette suite qui est divisible par 2017.

Indication : mener un raisonnement par l'absurde et considérer les restes modulo 2017 des 2017 premiers termes de cette suite.

Exercice 2 : 1. On se donne un ensemble M de neuf entiers strictement positifs qui ne possèdent pas de diviseur premier supérieur ou égal à 6. Montrer que l'on peut trouver deux entiers dans M dont le produit est un carré parfait (un carré parfait est un entier qui s'écrit k^2 avec k entier).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, parmi $(n+1)$ nombres pris dans l'ensemble $[2n]$, on pourra toujours en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 3 : Un club de judo a organisé une compétition à laquelle peut participer tout membre du club. Elle se déroule tout le long de l'année selon le principe que, chaque samedi, autant de matches que l'on veut peuvent être joués (éventuellement aucun) sachant qu'un match oppose deux joueurs et que tout membre du club joue au plus une fois contre tout autre membre. Montrer que, quelle que soit la semaine choisie, il existe au moins deux membres du club qui ont joué le même nombre de matches.

Exercice 4 : Montrer que toute personne a, dans les mille années qui précèdent, au moins un ancêtre qui est aussi un ancêtre de son père et de sa mère.

Exercice 5 : Dans le plan, on se donne treize points à coordonnées entières. Montrer que l'on peut toujours trouver quatre points parmi eux dont le centre de gravité a des coordonnées entières (le centre de gravité des points $(x_1, y_1) \ldots, (x_k, y_k)$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, \dfrac{y_1 + \ldots + y_k}{k}\right)$).

Indication : montrer que l'on peut trouver 5 paires de points $\{(x, y), (x', y')\}$ deux à deux disjointes et telles que $x + x'$ et $y + y'$ sont pairs. Travailler ensuite modulo 4.

Exercice 6 : (Théorème de Dirichlet, 1842) Montrer que pour tout x réel et tout entier n strictement positif, on peut trouver une fraction rationnelle p/q telle que $1 \leq q \leq n$ et $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{nq}$.

Exercice 7 : 1. Les élèves d'une classe ont la possibilité de jouer à deux sports. Une fois les choix exprimés, on constate que pour toute paire d'élèves $\{X, Y\}$, il y a au moins un des deux sports choisis par X et Y.

Montrer qu'il y a un des deux sports qui est choisi par tous les élèves.

2. Les élèves d'une classe ont la possibilité de jouer à trois sports. Une fois les choix exprimés, on constate que pour toute paire d'élèves $\{X, Y\}$, il y a au moins un des trois sports choisis par X et Y.

Montrer qu'il y a un des sports qui est choisi par au moins $2/3$ de l'ensemble des élèves.

Exercice 8 : 1. Soit $N, d \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'entiers (positifs) inférieurs ou égaux à N qui sont des multiples de d ?

2. Dans l'ensemble $[1000] = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, on enlève tous les multiples de 2,3,5 et 7. Quel est le cardinal de l'ensemble ainsi obtenu ?

Exercice 9 : (indicatrice d'Euler) Pour un entier positif k, on note $\varphi(k)$ le nombre d'entiers n vérifiant $1 \leq n \leq k$ et $\mathrm{pgcd}(n, k) = 1$. Montrer que si n admet $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_q^{k_q}$ comme décomposition en facteurs premiers, alors

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)$$

Indication : considérer les ensembles $A_i = \{x;\ x \leq n \text{ et } p_i | x\}$ pour $i \in [q]$.

Exercice 10 : Un dérangement d'un ensemble X est une permutation des éléments de X sans point fixe ($f : X \to X$, f bijective et $f(x) \neq x$ pour tout x de X). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. On pose $d(0) = 1$.

1. Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour montrer que $d(n) = n!\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$.

Indication : considérer les ensembles $A_i = \{f; f \text{ permutation de } [n] \text{ et } f(i) = i\}$.

2. Montrer que $d(n)$ est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$.

Exercice 11 : On dit que l'entier i est *en excès pour la permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si $\sigma(i) > i$ et on note $Exc(\sigma)$ l'ensemble des entiers qui sont en excès pour σ. Par exemple, $Exc(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ si $\sigma = (147)(25)(3698)$.

Calculer le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $Exc(\sigma) \cap \{n-1, n-2\} \neq \emptyset$.

Exercice 12 : On dit que l'entier i est une *descente de la permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ (on a donc forcément $i \in [n-1]$) et on note $Desc(\sigma)$ l'ensemble des entiers qui sont une descente de σ). Par exemple, $Desc(\sigma) = \{4, 6\}$ si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Combien de permutations ont un ensemble de descente inclus dans $\{1, 4, 6\}$?
2. Combien de permutations ont $\{1, 4, 6\}$ comme ensemble de descente ?
3. Combien de permutations ont un ensemble de descente inclus dans $\{1, 2, 4, 5, 7\}$?