Université Paul Sabatier Année 2019-2020
L3 E (Mathématiques pour l'enseignement) Algèbre 1

Exercices du chap. 3 (Combinatoire élémentaire)

Exercice 1. Une inversion d'une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ est un couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i < j \leq n$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ et l'on définit I_n comme le nombre total d'inversions dans le groupe symétrique S_n : $I_n := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} I(\sigma)$.

1. Démontrer la relation de récurrence : $I_n = nI_{n-1} + n!\,\frac{n-1}{2}$.
2. En déduire que $\dfrac{I_n}{n!} = \dfrac{n(n-1)}{4}$. Comment interpréter cette valeur ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute permutation $f \in \mathrm{S}_n$, on note $\mathrm{Fix}(f) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid f(i) = i\}$ l'ensemble des points fixes de f.

1. Pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$ donné, combien y a-t-il de permutations $f \in \mathrm{S}_n$ qui fixent i ?
2. En déduire que $\sum_{f \in \mathrm{S}_n} |\mathrm{Fix}(f)| = n!$.

Exercice 3. (Extrait de l'examen de juin 2018) On avance sur la droite réelle, dans le sens positif, en partant de 0. Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n le nombre de façons d'effectuer un trajet de longueur $n-1$ en faisant uniquement des pas de longueur 1 ou 2. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1) Démontrer que T_n est égal au n-ième nombre de Fibonacci F_n, défini par

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

2) Exprimer T_n comme une somme de coefficients binomiaux, en comptant le nombre $S_{n,k}$ de façons d'effectuer un trajet de longueur $n-1$ avec k pas de longueur 2 (et les autres de longueur 1).

Exercice 4. Soient $m, n, r \in \mathbb{N}$. Montrer les propriétés suivantes de deux façons : par le calcul et par un raisonnement combinatoire.

1. Si $r \leq m$ alors $A_n^r A_{n-r}^{m-r} = A_n^m$;
2. $n\binom{n-1}{m-1} = m\binom{n}{m}$;
3. $\binom{n+m}{r} = \sum \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ (identité de Vandermonde) ;
4. $\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r} = \binom{n}{m}\binom{m}{r}$ puis $\sum \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}$ (posé à l'examen de janvier 2018) ;
5. $\sum_{k \leq m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déduire de la fin de l'exercice précédent les formules :

$$(F_{n,m}) \quad \sum_{0 \leq k \leq m} A_k^n = \frac{1}{n+1}\, A_{m+1}^{n+1}.$$

2. On pose $S_j(m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^j$. Utiliser les formules $(F_{1,m})$, $(F_{2,m})$ et $(F_{3,m})$ pour calculer $S_1(m)$, $S_2(m)$ et $S_3(m)$.

Exercice 6.

1. Combien de mots sans répétition de lettre peut-on former avec les lettres du mot FACULTÉ ?
2. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot BAOBAB ? Et du mot MISSISSIPI ?
3. Combien de mots peut-on former en utilisant uniquement des lettres de BAZAR ?

Exercice 7. (Extrait de l'examen de janvier 2018) Papa fait 3 galettes : une grosse, une moyenne et une petite. Il y répartit n fèves identiques. Il veut en mettre au moins trois dans la grosse, au moins deux dans la moyenne et au moins une dans la petite. Combien a-t-il de possibilités ?

Exercice 8.

1. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro ?
2. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants ? (à présent, un enfant peut ne rien recevoir).
3. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins deux euros ?

4. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k garçons et j filles de sorte que chaque fille ait au moins un euro ?

Exercice 9. Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une urne contient n boules distinctes et l'on veut sélectionner k boules. Cette sélection peut se faire de quatre manières différentes (avec ou sans remise de la boule qui vient d'être tirée, en tenant compte ou non de l'ordre dans lequel les k boules ont été sélectionnées). Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le nombre de sélections possibles.

	avec ordre	sans ordre
avec remise		
sans remise		

2. Soient $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ et $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$. On considère les ensembles :
$U = \{f \in Y^X \mid f \text{ est injective}\}$;
$V = \{f \in Y^X \mid f \text{ est croissante (au sens large)}\}$;
$W = \{f \in Y^X \mid f \text{ est strictement croissante}\}$.
Vérifier que $|Y^X|$, $|U|$, $|V|$ et $|W|$ remplissent les cases du tableau de la question 1.

Exercice 10. (Extrait de l'examen de janvier 2018) Soient A, B, C, D quatre ensembles tels que $|A| = 18$, $|B| = 23$, $|C| = 21$, $|D| = 17$, $|A \cap B| = 9$, $|A \cap C| = 7$, $|A \cap D| = 6$, $|B \cap C| = 12$, $|B \cap D| = 9$, $|C \cap D| = 12$, $|A \cap B \cap C| = 4$, $|A \cap B \cap D| = 3$, $|A \cap C \cap D| = 5$, $|B \cap C \cap D| = 7$ et $|A \cap B \cap C \cap D| = 3$. Quel est le cardinal de $A \cup B \cup C \cup D$?

Exercice 11.

1. Soient $N, d \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'entiers (strictement positifs) inférieurs ou égaux à N qui sont des multiples de d ?
2. Dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, on enlève tous les multiples de 2, 3, 5 et 7. Quel est le cardinal de l'ensemble obtenu ?
3. Toujours dans $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, quel est le cardinal de l'ensemble obtenu une fois qu'on a enlevé tous les multiples de 8, 12 et 15 ?

Exercice 12. Un dérangement d'un ensemble X est une permutation de X sans point fixe ($f \in \mathrm{S}_X$ et $f(x) \neq x$ pour tout $x \in X$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $d(n)$ le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments.

Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour montrer que

$$d(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Indication : on utilisera les ensembles $A_i := \{f \in \mathrm{S}_X \mid f(i) = i\}$, pour $i \in X$.

Exercice 13. Utiliser la formule des classes pour résoudre les deux questions suivantes.

1. Un groupe d'ordre 35 opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a-t-il d'orbites ?
2. Un groupe d'ordre $143 = 11 \times 13$ opère sur un ensemble de 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

Exercice 14. Utiliser la formule des classes pour déterminer l'ordre du groupe des rotations du cube et celui du tétraèdre régulier. Même question pour leurs groupes d'isométries.

Exercice 15.

1. Faire l'inventaire des rotations du cube, sachant qu'il y en a 24 (en comptant l'identité).
2. À l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorer les faces d'un cube à rotation près, avec au plus 3 couleurs à sa disposition.