L3 ESR INTÉGRATION 2017-18

TD 3 : THÉORÈMES DE CONVERGENCE

Exercice 1. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f \in L^1(\mu)$*. Montrer que*

$$\mu\{x \in X \,;\, f(x) = +\infty\} = 0.$$

Exercice 2. *Soit* $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^2 x \mathbf{1}_{[0,1/n]} + (2n - n^2 x)\mathbf{1}_{(1/n,2/n]} \in \mathbb{R}$*. Montrer que* f_n *est mesurable et calculer*

$$\liminf \int_{[0,1]} f_n d\lambda,\ \limsup \int_{[0,1]} f_n d\lambda,\ \int_{[0,1]} \liminf f_n d\lambda,\ \int_{[0,1]} \limsup f_n d\lambda.$$

Exercice 3. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$*. On suppose que* $f, f' \in L^1(\mathbb{R}^+)$*. Montrer que* $f(x) \to 0$ *lorsque* $x \to +\infty$*.*

Exercice 4. *Soit* $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction (Lebesgue) intégrable sur tout intervalle* $[\varepsilon, 1]$*, avec* $0 < \varepsilon < 1$*. Montrer que*

$$f \text{ est intégrable sur } (0,1] \iff \sup_{0<\varepsilon<1} \int_\varepsilon^1 |f(t)| dt < +\infty.$$

Exercice 5. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$*, où* μ *est la mesure de comptage* ($\mu(E) = \sharp E$)*. Montrer que* $f : n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R}$ *est mesurable, qu'elle est* μ*-intégrable si et seulement si* $\sum |a_n| < +\infty$*, et que dans ce cas*

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n \geq 0} a_n.$$

Exercice 6. *Vérifier que la suite* $f_n = n^{-1}\mathbf{1}_{[n,+\infty)}$ *est monotone décroissante, converge uniformément vers zéro sur* $\mathbb{R}^+$*, mais que* $\lim \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda \neq 0$*. Est-ce en contradiction avec le théorème de la convergence monotone ?*

Exercice 7. *Donner un exemple d'une fonction continue* $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ *qui est intégrable au sens (généralisé) de Riemann, mais pas au sens de Lebesgue.*

Exercice 8. *On note* λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$*. Déterminer*

1) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(n+x)^n} d\lambda(x)$;

2) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n d\lambda(x)$;

3) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^\infty \frac{1}{nx} e^{-\frac{x}{n}} d\lambda(x)$;

4) $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right) d\lambda(x)$.

Exercice 9. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables telles que $f_n(x) \to f(x)$ p.p.*

1) Montrer que $||f_n - f||_1 \to 0 \Rightarrow \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$.

2) Mq la réciproque est fausse en général, et qu'elle est vraie si $f_n, f \geq 0$.

Exercice 10. *Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{-nx} - 2e^{-2nx} \in \mathbb{R}$.*

1) Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente pour tout $x > 0$ et calculer la somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

2) Montrer que f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

3) Comparer $\int_0^\infty f(x)dx$ et $\sum_{n\geq 1} \int_0^\infty f_n(x)dx$. Que se passe-t'il ?

Exercice 11. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable. Montrer que*

$$\int_X f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})dt.$$

En déduire que pour tout $p \geq 1$,

$$\int_X f^p d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{f > t\})dt.$$

Exercice 12. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu(X) = 1$, et $f \in L^1(X, \mathbb{R}^+)$. Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe croissante. Montrer que*

$$\chi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \chi \circ f d\mu.$$

Exercice 13. *Soit $a > 0$. Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 14. *On considère la fonction Γ d'Euler,*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que Γ est bien définie et continue sur $(0, +\infty)$.

2) Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $\Gamma^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3) Mq $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.