Exercices de topologie.

On rappelle qu'une boule ouverte centrée en $a \in E$ de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$B(a,r) = \{x \in E \mid \|a - x\| < r\}.$$

Exercice 1 Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$ On considère les normes classiques sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geqslant 1$) :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}, \quad \text{et } N_3(x) = \max\{|x_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Dessiner rapidement les boules ouvertes pour $n = 1, 2, 3$.

Exercice 2 On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$M(P) = \sup_k |a_k|, \quad \text{et} \quad N(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$$

Vérifier qu'on a bien défini des normes sur E. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère sur E les normes N_1, N_2 et N_∞ définies par

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt \quad N_2(f) = \Big(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \Big)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)|.$$

1) Montrer que N_∞ est bien une norme et décrire les boules ouvertes pour cette norme.
2) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs A et B tels que $N_1(f) \leqslant AN_2(f) \leqslant BN_\infty(f)$ pour tout $f \in E$.
3) En utilisant les fonctions $f_n(t) = \sqrt{n}(1 - nt)\mathbf{1}_{[0;1/n]}$ montrer que les trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 4 On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0. On note également $M(f) = \|f + f'\|_\infty$ et $M(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
1) Montrer que M et N sont des normes sur E.
2) Si g est une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle $f' + f = g$. En déduire que pour tout $f \in E$, on a

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \big(f(t) + f'(t) \big) dt, \forall x \in [0;1].$$

En déduire que les normes M et N sont équivalentes.

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles de taille (n, n). Démontrer que $N(A) = \sqrt{\mathrm{trace}(A^tA)}$ est une norme sur E qui vient d'un produit scalaire qu'on déterminera.

Exercice 6 Soit E l'espace des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$. On note M le sous-espace de E défini par

$$M = \{f \in E\, ;\ f(0) = 0\}\,.$$

On se propose de déterminer l'orthogonal de M dans E.
1) On considère la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M définie par : $h_n(x) = nx$ si $0 \leqslant x \leqslant 1/n$ et $h_n(x) = 1$ si $1/n \leqslant x \leqslant 1$. Montrez que si $f \in M^\perp$ alors $\int_0^1 f(t)dt = 0$.
2) En déduire que $M^\perp \subset E^\perp$, et conclure.

Exercice 7 Soit E un espace normé non trivial. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Montrer que F ne peut contenir aucune boule ouverte.

Exercice 8 Démontrer qu'on définit une distance d sur l'ensemble E des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels de $[0; 1]$, en posant :

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}|x_n - y_n|\,.$$

Exercice 9 Soit (E, d) un espace espace vectoriel normé et $a \in E$. Déterminer

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a; 1 + \frac{1}{n}) \text{ et } \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(a; 1 - \frac{1}{n}).$$

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel norme sur $\mathbb{C}$ de boule unite fermee B et F un sous-espace vectoriel ferme de E. On va montrer que si $F \neq E$, alors

$$\sup_{x\in\overline{B}} d(x, F) = 1.$$

a) Etablir les proprietes pour $x, x' \in E$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{C}$:
(i) $d(x, F) \leqslant ||x||$.
(ii) $d(x, F) = |\lambda| d(x, F)$.
(iii) $d(x - y, F) = d(x, F)$
(iv) $d(x + x', F) \leqslant d(x, F) + d(x', F)$.
b) Soit $x \in \overline{B}$ tel que $\alpha = d(x, F) > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que :

$$\alpha \leqslant ||x - y|| < (1 + \varepsilon).$$

c) Montrer qu'il existe $x' \in \overline{B}$ tel que

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} = d(x', F) < 1.$$

d) En déduire le résultat.

Exercice 11 Montrer qu'une norme est issue d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.