TD3

1. Soit une v.a. $X \sim \exp(\lambda)$, i.e. de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$.
   (a) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
   (b) Pour $\lambda = 1$ et $Y = \min\{X, 2\}$, calculer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

2. Soit une v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, i.e. de densité $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.
   (a) Vérifier par le calcul que $\mathrm{Var}(X) = 1$.
   (b) Calculer $\mathrm{E}(e^X)$.

3. Soit X une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et Y une v.a. uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.
   (a) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
   (b) Justifier que $\mathrm{Var}(Y) = n^2 \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(X)$.
   (c) En déduire la formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4. Soit une suite i.i.d. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de v.a. de Bernoulli avec paramètre p.
   On note $T = \min\{n \text{ tel que } X_n = 1\}$ avec $\min \emptyset = +\infty$.
   (a) Montrer que $T < +\infty$ p.s. et calculer $\mathrm{P}(T = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Calculer $\mathrm{E}(T)$
   (c) Calculer $\mathrm{Var}(T)$.
   (d) Si la famille $N, X_1, \ldots$ est indépendante, N v.a. entière intégrable, et les X_i de même loi que X intégrable, montrer l'identité de Wald :
   $$\mathrm{E}(X_1 + \ldots + X_N) = \mathrm{E}(N) \times \mathrm{E}(X).$$
   (e) En adaptant la démonstration de cette identité, retrouver le résultat de 4b sans calcul. Donner des hypothèses plus faibles pour l'identité de Wald.

5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X = -1) = \dfrac{1}{2}$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) En la calculant, montrer que pour tout réel x, l'espérance $\mathrm{E}(e^{xX}) \leq e^{x^2/2}$.
   (b) En appliquant l'inégalité de Markov à e^{xS_n}, montrer que pour tout réel $a \geq 0$,
   $$\mathrm{P}(S_n \geq a) \leq \exp\left(\frac{-a^2}{2n}\right).$$

6. Soit une suite i.i.d. (X_k) de v.a. de Bernoulli avec paramètre $1/2$. On pose

$$Z_n = \frac{X_1 + \ldots + X_{2n} - n}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Calculer $\mathrm{E}(Z_n)$ et $\mathrm{Var}(Z_n)$.

   On admettra (th. limite central) que $\mathrm{P}(Z_n > t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_t^\infty \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}z$,
   et on notera $\phi(x) = x 1_{x>0}$, $f_t(x) = 1_{x>t}$.

   (b) Montrer que $\mathrm{E}(\phi(Z_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

   (c) En déduire un équivalent le plus simple possible de $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} k$ lorsque $n \to \infty$.

7. Soit X une v.a. positive et non p.s. nulle.

   (a) Montrer que si $X \in L^2$,

$$\mathrm{P}\left(X \geq \frac{\mathrm{E}(X)}{2}\right) \geq \frac{\mathrm{E}(X)^2}{4\mathrm{E}(X^2)}.$$

   Indication : on pourra d'abord montrer que

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{2} \leq \int_{\mathrm{E}(X)/2}^{\infty} x \,\mathrm{dP}^X(x),$$

   puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $\mathrm{E}(X)^2$.

   (b) Généralisation : donner une minoration de cette probabilité $\mathrm{P}(X \geq \mathrm{E}(X)/2)$ faisant intervenir $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(X^p)$ lorsque $X \in L^p$, pour $p > 1$.

8. Soit une fonction f continue $[0,1] \to \mathbb{R}$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d. de Bernoulli avec paramètre $x \in [0,1]$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

   (a) Montrer que $Q(x) = \mathrm{E}(f(S_n/n))$ est un polynôme.

   (b) Calculer $\mathrm{E}(S_n/n)$ et $\mathrm{Var}(S_n/n)$.

   (c) Montrer que $\forall \delta > 0$, $\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.

   (d) Montrer que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ne dépendant que de f (pas de x, ni de n) tel que

$$|Q(x) - f(x)| \leq \frac{\max_{[0,1]} |f|}{2n\delta^2} + \epsilon.$$

   (e) Quel théorème vient-on de démontrer ?

   (f) Avec la seule loi forte des grands nombres, i.e. $S_n/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ p.s., que pouvait-on conclure dès le 8a ?