TD3

1. Soit U une v.a. uniforme sur $[0, 1]$

   (a) En passant par la fonction de répartition, montrer que la loi de $X = -\ln(U)$ est à densité que l'on déterminera.

   Pour g croissante, on définit son inverse généralisé $g^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \text{ tel que } g(x) \geq u\}$.

   (b) Montrer que si g est bijective $[a, b] \to [g(a), g(b)]$ alors $g^{\leftarrow} = g^{-1}$ sur $[g(a), g(b)]$.

   (c) Soit F la fonction de répartition d'une loi P^*. Quelle est la loi de $F^{\leftarrow}(U)$?

   (d) A quel détail près retrouve-t-on le résultat du 1a ?

   (e) Vérifier encore le résultat en déterminant $F^{\leftarrow}$ pour la loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $Z = \mu + \sigma X$.

   (a) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

   (b) En déduire $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

   (c) Déterminer la densité de Z.
   On note $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, "normale" ou "gaussienne".

   (d) Quelle est la fonction caractéristique $\phi^Z(t) = \mathrm{E}(e^{itZ})$ de Z ?

   (e) Sachant que la fonction "caractéristique" n'usurpe pas son épithète, (cf la fonction de répartition est aussi caractéristique), déterminer la loi de $U + V$ quand U et V sont indépendantes et respectivement $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$.

3. Soit X une v.a. uniforme sur $[0, 1]$ et Y une v.a. uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

   (a) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

   (b) Justifier que $\mathrm{Var}(Y) = n^2\mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(X)$.

   (c) En déduire la formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4. Soit (X_n) une suite de v.a. telle que

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \sum^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty.$$

   Montrer que $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ p.s.
   On pourra noter $C_\epsilon = (\exists N, n \geq N \Rightarrow |X_n| \leq \epsilon)$.

5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. L^2 i.i.d. dont on note $\mu = \mathrm{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.
   On note $\bar{X} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ et $S_n = (X_1 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_n - \bar{X})^2$.
   Calculer $\mathrm{E}(S_n)$.

6. Soit X une v.a. positive et non p.s. nulle.

   (a) Montrer que si $X \in L^1$, $\dfrac{\mathrm{E}(X)}{2} \leq \displaystyle\int_{\mathrm{E}(X)/2}^{\infty} x \, \mathrm{dP}^X(x)$.
   En déduire que si $X \in L^2$, $\mathrm{P}\left(X \geq \dfrac{\mathrm{E}(X)}{2}\right) \geq \dfrac{\mathrm{E}(X)^2}{4\mathrm{E}(X^2)}$.

   (b) Généralisation : donner une minoration de cette probabilité $\mathrm{P}(X \geq \mathrm{E}(X)/2)$ faisant intervenir $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(X^p)$ lorsque $X \in L^p$, pour $p > 1$.

7. Calculer l'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre λ.

8. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite i.i.d. de v.a. de Bernoulli de paramètre p.
   On note $T = \min\{n \text{ tel que } X_n = 1\}$ avec $\min \emptyset = +\infty$.

   (a) Montrer que $T < +\infty$ p.s. et calculer $\mathrm{P}(T = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Calculer $\mathrm{E}(T)$

   (c) Calculer $\mathrm{Var}(T)$.

   (d) Si la famille $N, X_1, \ldots$ est indépendante, N v.a. entière intégrable, et les X_i de même loi que X intégrable, montrer l'identité de Wald :

   $$\mathrm{E}(X_1 + \ldots + X_N) = \mathrm{E}(N) \times \mathrm{E}(X).$$

   (e) En adaptant la démonstration de cette identité, retrouver le résultat de 8b sans calcul.
   Donner des hypothèses plus faibles pour l'identité de Wald.