Université Paul Sabatier — Année 2018–2019
L3 Enseignement, module Analyse 2 — Semestre 6

TD3 : Équations différentielles linéaires : calculs

1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

1.1 Exemple 1 : équation homogène

On considère
$$(E_1) : xu' - 3u = 0.$$
a) Résoudre (E_1) sur $]0, +\infty[$, puis sur $] - \infty, 0[$. Vérifier que sur chacun de ces intervalles, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1.

b) Résoudre le problème de Cauchy associé sur $]0, +\infty[$ avec la condition initiale
$$u(1) = 2.$$
c) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$. Vérifier que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel ; quelle est sa dimension 1 ?

d) Résoudre le problème de Cauchy associé sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale
$$u(0) = 1.$$

1.2 Exemple 2 : équation non homogène

On considère
$$(E_2) : \sqrt{|x|}u' - u = x.$$
a) Résoudre l'équation homogène associée à (E_2) sur $]0, +\infty[$, puis sur $] - \infty, 0[$.

b) Utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver sur $]0, +\infty[$ une solution particulière, et en déduire la solution générale de (E_2) sur $]0, +\infty[$.

c) Déterminer la solution générale de (E_2) sur $] - \infty, 0[$.

d) Déterminer la solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

1.3 Solution particulière dans certains cas

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et Q un polynôme de degré n. On considère
$$(E_3) : u' - \alpha u = Q(x)e^{\beta x}.$$
a) On considère la fonction
$$u(x) = P(x)e^{\beta x}.$$
À quelle condition sur P est-elle solution de (E_3) ?

b) On suppose que $\beta \neq \alpha$. On considère l'application :
$$\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \quad P \mapsto P' - (\beta - \alpha)P.$$
Montrer qu'elle est linéaire, injective et surjective. En déduire que (E_3) admet une solution particulière de la forme $u(x) = P(x)e^{\beta x}$ avec P polynôme de même degré que Q.

c) On suppose que $\beta = \alpha$. Montrer que (E_3) admet une solution particulière de la forme $u(x) = P(x)e^{\beta x}$, avec P polynôme et préciser le degré de P.

1.4 Problème d'origine géométrique

On se place dans le plan muni du repère orthonormé. Déterminer l'ensemble des courbes $y = f(x)$ telles que si M est un point de la courbe et N désigne l'intersection de la normal e en M à la courbe et de l'axe $(0x)$, le milieu I de $[MN]$ est sur la parabole d'équation $y^2 = x$.

1.5 Problème d'origine étrange...

Un élastique a une extrémité fixe O et une extrémité mobile M. On étire l'élastique par le point M à une vitesse constante et égale à v (le point M se déplace sur la droite (Ox)). À l'instant $t = 0$ la longueur de l'élastique est ℓ.

Une fourmi F marche sur l'élastique à vitesse constante w. À l'instant initial $t = 0$, elle se trouve en O. La fourmi arrivera-t-elle en M ?

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

2.1 Équations à coefficients constants et homogènes

On considère
$$(E_4) : ay'' + by' + cy = 0,$$
avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_4) si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

b) On considère alors le "polynôme caractéristique" de l'équation $P(r) = ar^2 + br + c$. Décrire l'ensemble des solutions dans les trois cas suivants : $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

2.2 Équations à coefficients constants, mais non homogènes

a) On considère
$$(E_5) : y'' + 3y' - 4y = e^{2x} :$$
— résoudre l'équation homogène associé,
— déterminer une solution particulière de la forme Ce^{2x},
— en déduire la solution générale de (E_5).

b) On considère
$$(E_6) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x} :$$
— résoudre l'équation homogène associée,
— déterminer une solution particulière de la forme $P(x)e^{-x}$ avec P polynôme,
— en déduire la solution générale de (E_6).

d) On considère
$$(E_7) : y'' + by' + cy = Q(x)e^{\beta x},$$
avec Q polynôme ;
— on suppose que $\beta^2 + b\beta + c \neq 0$: montrer que (E_7) a une solution particulière de la forme $P(x)e^{\beta x}$ avec P de même degré que Q ;
— on suppose que $\beta^2 + b\beta + c = 0$: comment se modifie le cas précédent ?

2.3 Équations à coefficients non constants

2.3.1 Résolution par changement de fonction

On considère
$$(E_8) : xy'' + 2y' + xy = 0.$$

- on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$: à l'aide du changement de fonction inconnue $z(x) = xy(x)$, déterminer toutes les solutions de (E_8) sur $\mathbb{R}_+^*$;
- déterminer toutes les solutions de (E_8) sur $\mathbb{R}$.

2.3.2 Résolution par série entière

On considère
$$(E_9) : r^2v''(r) + rv'(r) + r^2v(r) = 0, \quad r \in]0, +\infty[.$$

Que peut-on dire sur l'ensemble des solutions de (E_9) ? Déterminer une solution série entière de la forme
$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n.$$

Quel est son rayon de convergence ? (Cette équation intervient dans la résolution de plusieurs équations aux dérivées partielles, en particulier quand le domaine est un disque ; r est alors la distance à l'origine, et J_0 est appelée la "fonction de Bessel d'ordre 0".)

2.3.3 Théorèmes de Sturm : étude qualitative

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. On considère
$$(E_{10}) : u'' + a(t)u' + b(t)u = 0.$$

Soient u_1 et u_2 deux solutions non nulles et indépendantes de (E_{10}). Montrer que

- si u_1 s'annule en a, alors $u'(a) \neq 0$, et il existe $\eta > 0$ tel que $u_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a - \eta, a[\cup]a, a + \eta]$ (autrement dit : *les zéros de u_1 sont simples et isolés*) ;
- si $u_1(a) = 0$, alors $u_2(a) \neq 0$ (autrement dit : *les zéros de u_1 sont distincts de ceux de u_2*),
- *si u_1 s'annule au moins deux fois, alors entre deux zéros consécutifs de u_1 il y a exactement un zéro de u_2* ; indications :
  - on considère deux zéros consécutifs α et β de u_1 ; montrer alors que $u_1'(\alpha)u_1'(\beta) < 0$;
  - on considère le "wronskien"
  $$W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t);$$
  calculer $W'(t)$, trouver une équa diff linéaire d'ordre 1 vérifiée par W, et montrer que $W(\alpha)W(\beta) > 0$;
  - en déduire que u_2 s'annule au moins une fois et pas plus qu'une fois sur $]\alpha, \beta[$.

2.4 Problème avec conditions au bord

On considère le problème
$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Trouver toutes les valeurs de λ pour lesquelles le problème admet au moins une solution u non nulle. Quelle différence notable avec les problèmes de Cauchy ?

3 Systèmes d'équations différentielles linéaires

3.1 Système homogène, matrice diagonalisable

On considère le système différentiel

$$(S_1) : X'(t) = A_1 X(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Résoudre le système différentiel (S_1) ;
- montrer que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel ; quelle est sa dimension ?
- résoudre le problème de Cauchy

$$X'(t) = A_1 X(t) \quad \text{et} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.2 Système non homogène, matrice diagonalisable

On considère le système différentiel

$$(S_2) : X'(t) = A_2 X(t) + B(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t+2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Résoudre le système différentiel homogène associé à (S_2) ;
- trouver une solution particulière ;
- en déduire la solution générale de (S_2).

3.3 Système homogène, matrice non diagonalisable

On considère le système différentiel

$$(S_3) : X'(t) = A_3 X(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A_3 ;
- déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ qui trigonalise A_3 ;
- en déduire la solution générale de (S_3).