

## TD4 : Équations différentielles non linéaires

### 1 Équations scalaires d'ordre 1

#### 1.1 Étude qualitative

##### 1.1.1 Dans le cas globalement lipschitzien

On considère

$$u'(t) = \sin u(t), \quad u(0) = x_0.$$

- Montrer que la fonction  $\sin$  est globalement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ , de sorte que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.
- Déterminer les points d'équilibre du problème.
- Déterminer la solution de chaque problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \sin u(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v'(t) = \sin v(t) \\ v(0) = \pi \end{cases}.$$

- Soit  $x_0 \in ]0, \pi[$ . Déterminer le comportement (monotonie ? limites ?) de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) = \sin w(t) \\ w(0) = x_0. \end{cases}$$

##### 1.1.2 Dans le cas localement lipschitzien

On considère

$$u'(t) = -u(t)^3, \quad u(0) = x_0.$$

- Montrer que la fonction  $x \mapsto -x^3$  est localement lipschitzienne mais pas globalement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ , de sorte que seul le théorème de Cauchy-Lipschitz version générale s'applique.
- Déterminer les points d'équilibre du problème.
- Soit  $x_0 > 0$ . Montrer que  $u$  est positive et décroissante sur  $[0, T^*(x_0)[$ , et en déduire que  $T^*(x_0) = +\infty$ , et la limite en  $+\infty$  de la solution. Calculer explicitement la solution pour retrouver ce comportement.
- Soit  $x_0 < 0$ . Montrer que  $u$  est négative et croissante sur  $[0, T^*(x_0)[$ , et en déduire que  $T^*(x_0) = +\infty$ , et la limite en  $+\infty$  de la solution. Calculer explicitement la solution pour retrouver ce comportement.

#### 1.2 Des exemples d'explosion en temps fini

### 1.2.1 Pour un problème autonome

On considère

$$u'(t) = u(t)^3, \quad u(0) = x_0.$$

- Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz (version générale) s'applique. Ainsi  $u$  existe sur  $[0, T_u^*(x_0)[$ .
- Résoudre dans le cas particulier  $x_0 = 0$ .
- Résoudre quand  $x_0 > 0$ . Que vaut le temps d'existence  $T_u^*(x_0)$  ?
- Résoudre quand  $x_0 < 0$ . Que vaut le temps d'existence  $T_u^*(x_0)$  ?

### 1.2.2 Pour un problème non autonome

On considère

$$v'(t) = v(t)^3 + t + 1, \quad v(0) = x_0.$$

- Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz (version générale) s'applique. Ainsi  $v$  existe sur  $[0, T_v^*(x_0)[$ .
- On suppose que  $x_0 > 0$ . Montrer que

$$\forall t \in ]0, \min(T_u^*(x_0), T_v^*(x_0))[ , \quad v(t) > u(t).$$

- En déduire que  $T_v^*(x_0) \leq T_u^*(x_0)$ .

## 1.3 Unicité et caractère Lipschitz

On considère

$$(C) : \quad u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad u(0) = 0.$$

### 1.3.1 La fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas localement lipschitzienne en 0

Vérifier qu'il n'existe pas de  $C$  tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |\sqrt{x} - 0| \leq C|x - 0|.$$

### 1.3.2 Une famille de solutions

Soit  $a \geq 0$ . On considère

$$u_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_a(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}(x-a)^2 & \text{pour } x \geq a \\ 0 & \text{pour } x \leq a \end{cases}.$$

Vérifier que pour tout  $a \geq 0$ , la fonction  $u_a$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et est solution du problème de Cauchy  $(C)$ . Cela donne une infinité de solutions au problème de Cauchy  $(C)$ .

### 1.3.3 D'autres solutions ?

Soit  $u : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  solution de  $(C)$  sur  $[0, +\infty[$ . On suppose que  $u$  n'est pas la fonction nulle. Montrer qu'il existe  $a \geq 0$  tel que  $u = u_a$  sur  $[0, +\infty[$ .

## 2 L'étude du mouvement du pendule

On veut étudier le mouvement du pendule :

La variation de l'angle avec la verticale est donnée par l'équation différentielle d'ordre 2 non linéaire

$$\theta'' = -\sin \theta, \quad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1, \quad (1)$$

où  $\theta_0$  est l'angle avec la verticale au temps 0, et  $\theta_1$  est la vitesse angulaire au temps 0.

### 2.1 Existence globale et unicité

a) Mettre ce problème sous forme vectorielle :

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad (2)$$

avec

$$u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ à préciser.}$$

b) On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |x| + |y|.$$

Montrer qu'il existe  $c$  tel que

$$\|f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\| \leq c \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.$$

Cela montre que  $f$  est globalement lipschitzienne.

c) En déduire que le problème de Cauchy (2) admet une et une seule solution  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

d) En déduire que le problème initial (1) admet une et une seule solution  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

e) Déterminer les points d'équilibre de (2), et ce qu'ils signifient pour (1). Est-ce physiquement raisonnable ?

f) On considère

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y^2 - \cos x.$$

Montrer que  $t \mapsto \mathcal{E}(u(t))$  est constante.

En fait,  $\mathcal{E} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$  est l'énergie de la solution : la somme de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}\theta'(t)^2$  et de l'énergie potentielle  $-\cos \theta(t)$ . Cela va permettre d'étudier le comportement de toutes les solutions. On va se concentrer sur trois cas "particuliers" :

$$(\theta_0, \theta_1) = (0, 4), \quad (\theta_0, \theta_1) = (0, \sqrt{2}), \quad (\theta_0, \theta_1) = (0, 2).$$

### 2.2 Premier cas particulier : $(\theta_0, \theta_1) = (0, 4)$

a) Tracer la courbe  $y = \sqrt{2(7 + \cos x)}$ .

b) Tracer

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \right\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ . En particulier, montrer qu'il existe  $T > 0$  tel que

$$\theta(T) = 2\pi, \quad \theta'(T) = 4.$$

En déduire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi, \quad \theta'(t + T) = \theta'(t).$$

Quelle est la signification physique de cette relation ?

### 2.3 Deuxième cas particulier : $(\theta_0, \theta_1) = (0, \sqrt{2})$

a) Tracer la courbe  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sqrt{2 \cos x}$ .

b) Tracer

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale  $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ . En particulier, montrer qu'il existe  $T > 0$  tel que

$$\theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\theta(t + T) = \theta(t), \quad \theta'(t + T) = \theta'(t).$$

Quelle est la signification physique de cette relation ?

d) Pouvez-vous imaginer (et prouver) d'autres propriétés particulières de la solution ? (propriétés de symétrie par exemple)

### 2.4 Troisième cas particulier : $(\theta_0, \theta_1) = (0, 2)$

a) Tracer la courbe  $x \in [-\pi, \pi] \mapsto \sqrt{2(1 + \cos x)}$ .

b) Tracer

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \right\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Quelle est la signification physique ?