Université Paul Sabatier Année 2019-2020

L3 E (Mathématiques pour l'enseignement) Algèbre 1

Exercices du chap. 4 : Applications et cardinaux

Exercice 1. Soient une application $f : A \to B$ et soient $X, X' \subset A$ et $Y, Y' \subset B$. Prouver que :

i) $f(\varnothing) = \varnothing = f^{-1}(\varnothing)$; $f^{-1}(B) = A$;

ii) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$ et $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$;

iii) $Y \subset Y' \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Y')$ et $X \subset X' \Rightarrow f(X) \subset f(X')$;

iv) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$ et $f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$;

v) $X \subset f^{-1}(f(X))$ et $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap \operatorname{Im} f$;

vi) $f^{-1}(\complement_B Y) = \complement_A f^{-1}(Y)$;

vii) $X \subset f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(X) \subset Y$;

viii) $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 2. Pour toute application $f : A \to B$:

1) montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

  i) f est injective,

  ii) $\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad f^{-1}(f(X)) = X$,

  iii) $\forall X, X' \in \mathcal{P}(A) \quad f(X \cap X') = f(X) \cap f(X')$,

  iv) $\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad f(\complement_A X) \subset \complement_B f(X)$;

2) montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

  i) f est surjective,

  ii) $\forall Y \in \mathcal{P}(B) \quad f(f^{-1}(Y)) = Y$,

  iii) $\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad f(\complement_A X) \supset \complement_B f(X)$.

Exercice 3. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Montrer que :

1. Si $g \circ f : A \to C$ est injective alors f est injective.
2. Si $g \circ f : A \to C$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 4. Soient X et Y deux parties d'un ensemble E et

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto (A \cap X, A \cap Y).$$

Donner une CNS sur X et Y pour que f soit :

1. injective ; 2. surjective ; 3. bijective.

Exercice 5. Soit $i : A \to B$ une injection. On suppose $A \neq \varnothing$.

1) Montrer qu'il existe une application $s : B \to A$ telle que $s \circ i = \mathrm{id}_A$.

2) En déduire que :

  (a) pour toute application $f : A \to C$, il existe une application $g : B \to C$ telle $f = g \circ i$;

  (b) i est simplifiable à gauche, c.-à-d.

$$\forall C \quad \forall h, h' : C \to A \quad (i \circ h = i \circ h' \Rightarrow h = h') ;$$

  (c) si $A \neq \varnothing$ et s'il existe une injection de A dans B, alors il existe une surjection de B dans A.

3) Qu'en est-il si $A = \varnothing$?

Exercice 6. Montrer qu'une application $s : B \to A$ est surjective si et seulement si elle est simplifiable à droite, c.-à-d.

$$\forall C \quad \forall f, f' : A \to C \quad (f \circ s = f' \circ s \Rightarrow f = f').$$

Exercice 7. 1. Sur $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(m,n)\mathcal{R}(m',n') \Longleftrightarrow m + n' = n + m'$ est une relation d'équivalence.

a) Montrer que l'opération $\overline{(m,n)} + \overline{(s,t)} = \overline{(m+s, n+t)}$ est bien définie.

b) Montrer que l'opération $\overline{(m,n)} * \overline{(s,t)} = \overline{(ms+nt, ns+mt)}$ est bien définie.

c) Quel est l'intérêt de ces relations ?

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{Z}_n$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n.

1. a) Montrer que la loi d'addition $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ induit une loi d'addition dans $\mathbb{Z}_n$.

b) Écrire les tables d'addition de $\mathbb{Z}_5$ et $\mathbb{Z}_6$.

2. a) Montrer que la loi de multiplication $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ induit une loi de multiplication dans $\mathbb{Z}_n$.

b) Écrire les tables de multiplication de $\mathbb{Z}_5$ et $\mathbb{Z}_6$.

Exercice 9. (Extrait de l'examen de janvier 2018)

On note $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, -\overline{1}\}$ l'ensemble des classes de congruence modulo 3, muni des opérations $+$ et $\times$ (déduites, par passage au quotient, des opérations usuelles sur $\mathbb{Z}$, donc héritant des bonnes propriétés de ces opérations usuelles – associativité, commutativité, neutres, distributivité – qui font de $\mathbb{F}_3$ ce qu'on appelle un anneau commutatif unitaire).

1) Dresser les tables de ces deux opérations sur $\mathbb{F}_3$.
2) Soit $A = \mathbb{F}_3[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_3$ et $B \subset A$ le sous-ensemble des polynômes de degré strictement inférieur à 2 (y compris le polynôme $\overline{0}$, qui par convention est de degré $-\infty$).
   Dresser la liste des éléments de B.
3) En notant $q(P)$ et $r(P)$ (pour tout $P \in A$) le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + \overline{1}$ dans A, caractérisés par
   $$q(P) \in A, \quad r(P) \in B \quad \text{et} \quad P = \left(X^2 + \overline{1}\right) q(P) + r(P),$$
   on définit sur A une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par :
   $$P\mathcal{R}Q \Leftrightarrow r(P) = r(Q).$$
   On note $\mathrm{cl}(P)$ la $\mathcal{R}$-classe d'un élément $P \in A$.
   Montrer que l'application
   $$\overline{r} : A/\mathcal{R} \to B, \quad \mathrm{cl}(P) \mapsto r(P)$$
   est bien définie et bijective.
4) Montrer que $P\mathcal{R}Q$ si et seulement si $X^2 + \overline{1} \mid P - Q$ (c'est-à-dire si $P - Q$ est le produit de $X^2 + \overline{1}$ par un polynôme de A).
5) Montrer qu'il existe une unique application $\oplus : A/\mathcal{R} \times A/\mathcal{R} \to A/\mathcal{R}$ et une unique application $\otimes : A/\mathcal{R} \times A/\mathcal{R} \to A/\mathcal{R}$ telles que
   $$\forall P, Q \in A \quad \mathrm{cl}(P) \oplus \mathrm{cl}(Q) = \mathrm{cl}(P + Q) \text{ et } \mathrm{cl}(P) \otimes \mathrm{cl}(Q) = \mathrm{cl}(P \times Q).$$
6) Calculer $r(-X^2)$ et $r((X + \overline{1})(X - \overline{1}))$, puis montrer que
   $$\forall P \in B \setminus \{\overline{0}\} \quad \exists Q \in B \quad r(P \times Q) = \overline{1}.$$
   Comment cette propriété se traduit-elle sur les éléments de l'anneau $A/\mathcal{R}$?

Exercice 10. On rappelle que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Soit $(E_p, f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables E_p, munis chacun d'une bijection $f_p : \mathbb{N} \to E_p$. Déduire du rappel que l'ensemble $\cup_{p \in \mathbb{N}} E_p$ est dénombrable.
2. En déduire que l'ensemble des nombres complexes algébriques (c.-à-d. racines d'un polynôme non nul à coefficients rationnels) est dénombrable.

Exercice 11. Montrer que tout intervalle réel non trivial (c.-à-d. contenant au moins deux réels) a la puissance du continu.

Exercice 12. Vrai ou faux ? (justifier !)

1. $\mathbb{Q}$ est dénombrable ?
2. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est équipotent à $[0, 1]$?
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\mathrm{Im}(f)$ est équipotent à $[a, b]$?
4. L'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable ?
5. S'il existe une injection non surjective de E dans F alors $\mathrm{card}\, E < \mathrm{card}\, F$?
6. S'il existe une surjection non injective de E dans F alors $\mathrm{card}\, E > \mathrm{card}\, F$?

Exercice 13. 1. Démontrer que pour tous cardinaux α, β et γ,
$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma, \quad (\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma \quad \text{et} \quad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}.$$

2. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ont la puissance du continu.