L3 ESR INTÉGRATION 2017-18

TD 4 : MESURES PRODUITS

Exercice 1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité (au sens de Lebesgue) des fonctions suivantes:*

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x+y)^\alpha} \text{ sur }]0,\infty[^2 \qquad g(x,y) = \frac{1}{(x+y)^\alpha} \text{ sur }]0,1[^2$$

$$h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \text{ sur }]0,1[^2 \qquad k(x,y) = \frac{\sin(x-y)}{x^2+y^2} \text{ sur }]0,1[^2$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{x+y^2+z^3} \text{ sur }]0,1[^3 \quad h(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} \text{ sur }]0,1[^3.$$

Exercice 2. *Calculer l'intégrale $J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. On pourra montrer que $J^2 = \int_D e^{-(x^2+y^2)}\,d(\lambda \otimes \lambda)$, $D =]0,\infty[^2$, et passer en coordonnées polaires.*

Exercice 3. *Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \in \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy \neq \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx.$$

Est-ce en contradiction avec le théorème de Fubini ?

Exercice 4. *Montrer que la fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-y}\sin(2xy) \in \mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ et en déduire que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin y)^2}{y} e^{-y} dy = \frac{\ln 5}{4}.$$

Exercice 5. *On considère la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x^2+y^2) \in \mathbb{R}$.*

1) Soit $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq n\pi\}$. Calculer $J_n = \int_{D_n} |f|\,d(\lambda \otimes \lambda)$.

2) La fonction f est-elle $\lambda \otimes \lambda-$intégrable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6. *On note S_{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et B_n la boule unité.*

1) Exprimer l'aire de S_{n-1} à l'aide de la fonction Γ.

2) Exprimer le volume de B_n en fonction de l'aire de S_{n-1} et en déduire

$$\mathrm{Vol}(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Exercice 7. *On considère les espaces mesurés $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$, où*

$X = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{P}(X), \mu(A) = card(A)$ *est la mesure de comptage,*
$Y = [0,1], \mathcal{B}$ *est la σ-algèbre de Borel sur $[0,1]$, λ est la mesure de Lebesgue.*

On note $I_j^n = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ et $Q_n = (I_1^n \times I_1^n) \cup (I_2^n \times I_2^n) \cup \cdots \cup (I_n^n \times I_n^n)$.

1) Montrer que l'ensemble Q_n est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable.

2) En déduire que $D = \{(t,t) \mid t \in [0,1]\}$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable.

3) On note $f = \mathbf{1}_D$. Calculer $\int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ et $\int_Y f(x,y)\, d\lambda(y)$, puis

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\lambda(y) \text{ et } \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\lambda(y) \right) d\mu(x).$$

Exercice 8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Borel mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction Borel mesurable. Le graphe de f est l'ensemble*

$$G_f = \{(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x_{N+1} = f(x_1, \ldots, x_N)\}.$$

Mq $G_f \subset \mathbb{R}^{N+1}$ est Borel mesurable et que sa mesure de Lebesgue est nulle.

Exercice 9. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que le produit de convolution de f et g*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

vérifie $f \star g(x) = g \star f(x)$, et $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec

$$||f \star g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$

Exercice 10. *Soit $a, b > 0$ et $f_a : x \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-a|x|^2} \in \mathbb{R}$. Calculer $f_a \star f_b$.*