Université de Toulouse III,
Licence $3^{\text{ème}}$ année, L3 ESR, 2018-2019 **feuille n° 4**

Exercices de topologie.

Exercice 1 On considère $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \|_1$. Est-ce que l'application linéaire $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(0)$ est continue ?

Exercice 2 Montrer qu'un produit $X \times Y$ d'espaces métriques non vides est complet si et seulement si X et Y le sont.

Exercice 3 Dans un espace métrique, soient A une partie d'adhérence complète et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy telle que $d(x_n; A) \to 0$. Montrer que la suite converge.

Exercice 4 Soit (E, d) et (F, δ) des espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue, on suppose que E est compact.
1) Montrer que si $K \subset E$ est fermé alors $f(K)$ est compact.
2) Montrer que si f est de plus bijective alors c'est un homéomorphisme.

Exercice 5 Soit (E, d) et (F, δ) des espaces métriques et $f_n : E \to F$ une suite d'applications continues surjectives. On suppose que E est compact.
Montrer que si la suite (f_n) converge uniformément vers f alors f est aussi surjective. Donner un contre-exemple dans le cas non compact.

Exercice 6 Soit $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = 1 - nt$ si $t \in [0;1/n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t \in [1/n;1]$, montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.
Même question avec l'espace l^∞ des suites réelles bornées muni de la norme $\| \|_\infty$.

Exercice 7 On munit $M_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices carrées de taille n) de la distance $d(A, B) = \max_{i,j} |a_{i,j} - b_{i,j}|$.
1) Montrer que $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.
2) Montrer que les matrices inversibles forment un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 À l'aide d'arguments élémentaires, dire si les espaces suivants sont compacts ou non (pour la topologie usuelle, tout espace de matrices $M_{p;q}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}^{pq}$).
1. La sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$.
2. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
3. Le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1.
5. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9 Montrer que la projection $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p(x, y) = x$ est continue pour la distance produit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Trouver un fermé $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $p(F)$ ne soit pas fermé. Montrer que la projection d'un ouvert est un ouvert.

Exercice 10 Soit E un espace discret. Montrer que E est compact si et seulement s'il est fini.

Exercice 11 Soit $(E, \| \|)$ un espace normé et F un sous-espace de dimension finie. On veut montrer que F est fermé dans E.
1) Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$. Conclure.
2) Autre méthode. Montrer que si $x \in E$ alors $d(x; F) = \inf\{\|x - y\| \,;\, y \in F \text{ et } \|y\| \leqslant 2\|x\|\}$. En déduire que F est fermé dans E.
3) Montrer directement que F est fermé, en utilisant les suites.

Exercice 12 Soit $(E, \| \|)$ un espace normé, $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire et $H = \ker \phi$. Le but de cet exercice est de montrer que H est fermé dans E si et seulement si ϕ est continue. On suppose que H est fermé dans E.
A) On va montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\|x\| < \rho \Longrightarrow |\phi(x)| < 1$.
Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) = 1$.
1) Montrer que $a + H$ est fermé dans E.
2) Montrer qu'il existe un réel $\rho > 0$ tel que $B(0; \rho) \cap (a + H) = \emptyset$. On rappelle que $B(0; \rho)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon ρ.
3) Montrer que pour tout x dans la boule $B(0; \rho)$, on a $|\phi(x)| < 1$.
B) En déduire que ϕ est continue.

Exercice 13 Avec les mêmes hypothèses que dans l'exercice précédent, on montre que si ϕ n'est pas continue alors H est dense dans E. On note $\overline{H}$ l'adhérence de H.
1) Montrer que $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) Soient $y \in \overline{H} \setminus H$ et $u = \frac{1}{\phi(y)} y$. Montrer que $E = H \oplus \mathbb{R}.u$.
3) En déduire que $E = \overline{H}$.

Exercice 14 Sur l'e.v. l^1 des suites réelles dont la série est absolument convergente, soient d_1 et d_∞ les distances associées aux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.
1. Montrer que l'application identité est 1-lipschitzienne de $(l^1; d_1)$ dans $(l^1; d_\infty)$.
2. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un $x \in l^1$ tel que $\|x\|_1 = 1$ et $\|x\|_\infty = 1/n$.
3. Qu'en déduit-on sur les topologies associées ?
4. Quel est le complété de l^1 pour ces deux distances ?

Exercice 15 L'objectif de cet exercice est de revoir la démonstration de l'équivalence des normes sur un espace normé de dimension finie. On considère donc un espace normé (E, N) de dimension finie n.
On rappelle qu'une fonction continue $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un compact K est bornée et atteint ses bornes dans K.
1) Montrer que les compacts de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.
2) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On définit alors sur E l'application $\| \| : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par $\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| = \max_i |\lambda_i|$. Montrer que $\| \|$ est une norme sur E et que les espaces normés $(E, \| \|)$ et $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ sont homéomorphes.
3) Soit $S = \{x \in E \,;\, \|x\| = 1\}$. Montrer que S est compact dans $(E, \| \|)$.
4) Montrer que la fonction $N : (E, \| \|) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.
5) Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives A et B telles que $A \leqslant N(x) \leqslant B$ pour tout x dans S.
6) Montrer que les normes N et $\| \|$ sont équivalentes.

Exercice 16 Déduire de l'exercice précédent que dans un espace normé de dimension finie, les compacts sont les partie fermées bornées.
Déduire également que si on se donne une application linéaire f de (E, N) dans un espace normé $(F, \| \|_F)$, alors f est forcément continue.