L3 ESR INTÉGRATION 2017-18

TD 5 : ESPACES L^P

Exercice 1. *Déterminer pour quelles valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ les fonctions suivantes appartiennent à $L^p(\mathbb{R}^n)$:*

$$f_a(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^a}; \quad g_b(x) = \frac{1}{|x|^b} e^{-|x|^2}.$$

Exercice 2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et p, q des exposants conjugués.*

1) Montrer que si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$ alors $fg \in L^1(X)$ et

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q.$$

2) Montrer que si $f_n \to f$ dans $L^p(X)$ et $g_n \to g$ dans $L^q(X)$ alors

$$f_n g_n \longrightarrow fg \text{ dans } L^1(X).$$

Exercice 3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < r < q \leq +\infty$.*

1) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in (0,1)$ tel que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

2) Montrer que si $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ alors $f \in L^r(X)$ et

$$||f||_r \leq ||f||_p^{\theta} ||f||_q^{1-\theta}.$$

Exercice 4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et p, q, r t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.*

1) Montrer que si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$ alors $fg \in L^r(X)$ et

$$||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

2) Montrer que si $f_n \to f$ dans $L^p(X)$ et $g_n \to g$ dans $L^q(X)$ alors

$$f_n g_n \longrightarrow fg \text{ dans } L^r(X).$$

Exercice 5. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{comptage})$.*

1) Montrer que $L^p(X) = \ell^p(\mathbb{N}) := \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \sum_n |x_n|^p < +\infty\}$.

2) Montrer que $\ell^r(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ si $r < p$ et que cette inclusion est stricte.

Exercice 6. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace avec mesure complète et $\mu(X) < +\infty$.*

1) Mq $L^\infty(X) \subset \cap_{p \geq 1} L^p(X)$ et donner un exemple d'inclusion stricte.

2) Montrer que si $f \in L^\infty(X)$ alors $||f||_\infty = \lim_{p \to +\infty} ||f||_p$.

3) Montrer que $L^p(X) \subset L^r(X)$ si $r < p$. Montrer par un exemple que cette inclusion est fausse en général, si $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 7. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on considère*

$$\tau_x f : y \in \mathbb{R}^n \mapsto f(y - x) \in \mathbb{R},$$

qui est bien définie pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\tau_x f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$x_j \to a \text{ dans } \mathbb{R}^n \Longrightarrow \tau_{x_j} f \to \tau_a f \text{ dans } L^p.$$

On pourra utiliser la densité des fonctions continues à support compact.

Exercice 8. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \geq 1$ et $f, f_n \in L^p(X)$.*

1) Montrer que si $f_n \to f$ dans $L^p(X)$ alors il existe une sous-suite f_{n_k} et $g \in L^p(X)$ telles que f_{n_k} converge vers f p.p. et $|f_{n_k}| \leq g$.

2) Donner un exemple qui montre qu'il est nécessaire de considérer une sous-suite pour obtenir une domination.

3) Donner un exemple qui montre qu'il est nécessaire de considérer une sous-suite pour obtenir la convergence presque partout.

Exercice 9. *Soit $1 < p \leq +\infty$, q l'exposant conjugué et $X = (0, +\infty)$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour $f \in L^p(X)$ on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.*

1) Montrer que $|F(x) - F(y)| \leq ||f||_p |x - y|^{1/q}$.

2) Montrer que $\lim_{x\to 0} F(x)x^{-1/q} = 0$ et que l'exposant $1/q$ est optimal.

Exercice 10. *Soit $\rho_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ des fonction lisses de valeur moyenne 1 à support compact inclus dans la boule $B(0, 1/j)$.*

a) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N), g \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Mq $f * g$ est C^∞ et $(f * g)^{(n)} = f * g^{(n)}$.

b) Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Mq $f * \rho_j$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}^N$.

c) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $f * \rho_j$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. (Indication: Utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.)

Exercice 11. *Soit F la fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par*

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{ax} - 1}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

1) Déterminer les valeurs en lesquelles F est définie, continue, dérivable.

2) Calculer F' lorsqu'elle existe et en déduire une autre expression de F.

Exercice 12. *Soit* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles f est bien définie.

2) Calculer f' et en déduire que $f(x) = -\displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{1 - e^t}\, dt, \quad \forall x > 0.$