Feuille de TD 5 : Résolution d'équations non linéaires...

Exercice 1. (Résolution d'une équation par méthode de point fixe)
On souhaite résoudre l'équation non linéaire suivante en utilisant une méthode de point fixe :

$$f(x) = 0, \qquad \text{avec} \qquad f(x) = x - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{2}.$$

1. En étudiant les variations de f, montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution que l'on notera $\overline{x}$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n), \\ x_0 = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \phi(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{2}.$$

   (a) Montrer que ϕ est contractante de rapport $1/5$.
   (b) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{x}$.
   (c) Montrer que l'on a la vitesse de convergence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{1}{5^n}|x_0 - \overline{x}|.$$

Exercice 2. (Preuve de la convergence quadratique de la méthode de Newton scalaire)
On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(\ell) = 0$ et $f'(\ell) \neq 0$. On cherche à montrer qu'il existe un intervalle centré autour de ℓ tel que, si x_0 est pris dans cet intervalle, la suite de Newton définie par :

$$x_0, \qquad \forall n \geqslant 0,\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

converge quadratiquement vers ℓ.

1. On définit par commodité la fonction $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer qu'il existe un voisinage de ℓ sur lequel f' ne s'annule pas.
2. Calculer $g(\ell)$ et $g'(\ell)$ et en déduire que, si x_n et x_{n+1} sont définis, alors

$$|x_{n+1} - \ell| \leqslant \left(\sup_{u\in S(x_n,\ell)} |g'(u)|\right)|x_n - \ell|$$

   et

$$|g'(x)| \leqslant \left(\sup_{u\in S(x_n,\ell)} |g''(u)|\right)|x_n - \ell|$$

   où $S(x_n, \ell)$ est l'intervalle fermé de bornes x_n et ℓ.

3. Montrer qu'il existe un intervalle centré en ℓ invariant par la fonction g. En déduire que pour tout x_0 dans cet intervalle la suite $(x_n)_n$ donnée par (1) est bien définie et que l'on a une majoration du type
$$|x_{n+1} - \ell| \leqslant M|x_n - \ell|^2$$
en explicitant la constante M.
4. Conclure.

Exercice 3. (Méthode de point fixe d'ordre quelconque)
Soit $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé non réduit à un point et $f : I \to I$ de classe C^1 telle que $\sup_{x\in I}|f'(x)| < 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $l \in I$.
2. Pour $u_0 \in I$, on définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite u converge vers l.
   (b) Dans cette question, on suppose de plus que f est de classe C^r avec $r \geqslant 2$ et que $f^{(k)}(l) = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, r-1$ et enfin que pour tout $x \in I$, $f^{(r)}(x) \in [0, 1[$. Montrer la convergence de u vers l et que cette convergence est d'ordre au moins r.

Exercice 4. (Un peu de géométrie...) On cherche à déterminer les points d'intersection d'un cercle avec une hyperbole. Plus précisément on cherche les solutions du système d'équations polynomiales suivant :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

1. Calculer si il y en a la/les solution/s de ce problème.
2. Écrire l'itération de Newton pour la résolution de ce problème. Montrer qu'une telle suite est bien définie dès que sa donnée initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est telle que $x_0 \times y_0 \neq 0$ et qu'elle converge vers la solution calculée à la question précédente.

Exercice 5. (Une histoire d'échelle...) Soient deux échelles de longueurs respectives 3 et 4 mètres, posées contre deux murs verticaux selon la figure ci-contre. On sait que les échelles se croisent à une distance d'un mèter du sol, et l'on cherche à connaître la distance d entre les deux murs.

1. Montrer que le problème revient à déterminer x et y tels que
$$16x^2 = (x^2 + 1)(x + y)^2$$
$$9y^2 = (y^2 + 1)(x + y)^2$$
2. Écrire une fonction Scilab qui à $(x^{(0)}, y^{(0)})$ associe $(x^{(k)}, y^{(k)})$ le $k^{\text{ième}}$ itéré de l'algorithme de Newton pour la résolution du système de la question précédente.
3. Visualiser les premiers itérés $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ construits par la méthode de Newton en partant de $x^{(0)} = 1$ et $y^{(0)} = 1$.