Exercices de topologie.

Exercice 1 Soit $a > 1$. Montrer que $x \to x^a$ est Lipschitzienne sur tout segment $[0, M]$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $a < 0$. Montrer que $x \to x^a$ est Lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$ mais n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $a \in]0, 1]$. Montrer (ou admettre) que $x, y \in \mathbb{R}^+, |x^a - y^a| \leqslant |x - y|^a$ et en déduire que $x \to x^a$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2 Soient (E, d) un espace métrique, k un réel positif et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications k-Lipschitziennes de E dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $(f_i(a))_{i \in I}$ soit majorée. Montrer que pour tout $x \in E$, la famille $(f_i(x))_{i \in I}$ est majorée et que l'application $\sup_{i \in I} f_i$ est k-Lipschitzienne.

Exercice 3 Soir E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que toute application linéaire est continue.

Exercice 4 Soient I un intervalle réel, $f : I \to \mathbb{R}$ et K l'ensemble des réels $k \geqslant 0$ tels que $x, y \in I$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|.$$

On dit que f est lipschitzienne si K est non vide.
1. Montrer que si f est lipschitzienne, alors K possède un plus petit élément.
2. On suppose f dérivable. Montrer que si f est lipschitzienne, alors f' est bornée.
3. Justifier la réciproque.