# L3 ESR INTÉGRATION 2017-18

TD 6 : CHANGEMENT DE VARIABLES ET TRANSFORMATION DE FOURIER

**Exercice 1.** *Soit $T > 0$. On considère la cubique cuspidale*
$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y^2 = x^3\}.$$

*1) Mq $\varphi : t \in (0, T] \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ paramétrise une partie $\mathcal{C}_T$ de $\mathcal{C}$.*

*2) Montrer que la longueur de $\mathcal{C}_T$ est $\ell(T) = \frac{1}{27}(4 + 9T^2)^{3/2} - \frac{8}{27}$.*

**Exercice 2.** *Soit $R > r$ et $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}^3$ le tore de révolution donné par*
$$\varphi(u, v) = ([R + r\cos u]\cos v, [R + r\cos u]\sin v, r\sin u),$$
*avec $(u, v) \in (0, 2\pi)^2$, ce qui couvre le tore à l'exception de deux cercles. Mq*
$$\mathrm{Aire}(\mathbf{T}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(r\cos u + R)dudv = 4\pi^2 rR.$$

**Exercice 3.** *On note $V_1$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $\lambda$ la mesure de Lebesgue, et $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$, pour $s > 0$.*

*1) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda(x) = \pi^{n/2}$.*

*2) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda(x) = \int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, e^{-||x||^2} > t\}\right) dt$.*

*3) En déduire, en utilisant l'homogénéité de la fonction volume, que*
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda(x) = V_1 \int_0^1 (-\ln t)^{n/2} dt \text{ et } V_1 = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

*4) Montrer par récurrence que $V_1 = \pi^k/k!$ si $n = 2k$ et*
$$V_1 = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} \text{ si } n = 2k + 1.$$

**Exercice 4.**

*1) Montrer que $\varphi(u, v) = (u^2 + v^2, 2uv)$ réalise un difféomorphisme de $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,;\, u > v > 0\}$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > y > 0\}$.*

*2) En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} dudv$.*

**Exercice 5.** *Soit $V$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ borné par les 3 plans de coordonnées et la surface $S$ d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Calculer son volume en utilisant le changement de variables $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$.*

**Exercice 6.**

*1) Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $E(x) = 0$ si $x \le 0$, et $E(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x > 0$. Montrer que $E$ est une fonction lisse.*

*2) Vérifier que la fonction*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \chi(x) = cE(-x-1)E(x-1)$$

*est une fonction lisse telle que $0 \le \chi$, $\chi \equiv 0$ hors de $[-1,1]$ et $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$ pour un bon choix de la constante $c > 0$.*

*3) Construire une famille de fonctions lisse $\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, telle que $0 \le \chi_\varepsilon$, $\chi_\varepsilon \equiv 0$ hors de la boule centrée à l'originie et de rayon $\varepsilon$, et $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon = 1$.*

**Exercice 7.** *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ensemble ouvert. Soit $K \subset \Omega$ un compact. Montrer qu'il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \le \chi(x) \le 1$ pour tout $x$, $\chi = 1$ sur $K$ et $\chi = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.*

*On pourra procéder ainsi: soit $\varepsilon < \frac{1}{4} dist(K, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, soit*

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid dist(x, K) \le \varepsilon\}$$

*et soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $supp(\rho) \subset B(0,\varepsilon)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = 1$. On montrera que la fonction $\chi = \rho * 1_{K_\varepsilon}$ satisfait toutes les propriétés demandées.*

**Exercice 8.** *Pour tout $a > 0$, calculer la transformée de Fourier*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

*de la Gaussienne $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-ax^2} \in \mathbb{R}$.*

**Exercice 9.** *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que leurs transformées de Fourier vérifient*

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

**Exercice 10.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes:*

*i) $\mathcal{F}\tau_a f(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$ et $(\tau_a \mathcal{F}f)(\xi) = \mathcal{F}e^{ia\cdot}f(\cdot)(\xi)$.*

*ii) $\mathcal{F}f(ax)(\xi) = \frac{1}{a}\mathcal{F}f(\frac{\xi}{a})$.*

*iii) Si la fonction $f$ est paire (respectivement impaire), alors $\mathcal{F}f$ est paire (respectivement impaire).*

*iv) Si $f$ est réelle et paire, alors $\mathcal{F}f$ est réelle (et paire); si $f$ est réelle et impaire, alors $\mathcal{F}f$ est imaginaire (et impaire).*

**Exercice 11.** *Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :*

*a) $\chi_{[-A,A]}$ (fonction caractéristique de l'intervalle $[-A, A]$ ).*

*b)* $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \ge 0, \\ 0 & si \quad x < 0. \end{cases}$

*c) $h(x) = xe^{-|x|}$.*

**Exercice 12.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable et telle que $f',\ f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.*