Exercices de topologie.

Exercice 1 Exemples d'espaces compacts. Montrer que :
1. un espace fini séparé est compact ;
2. un espace discret est compact si et seulement s'il est fini ;
3. dans un espace séparé, étant donnée une suite convergente, l'ensemble constitué des termes de la suite ainsi que de la limite est compact.
4. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$; on note $A + B = \{a + b \mid a \in A; b \in B\}$.
4.1. Montrer que si A et B sont compacts alors $A + B$ aussi.
4.2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ est fermé.
4.3. Donner un exemple où A et B sont fermés mais pas $A + B$.

Exercice 2 Distance entre un compact et un fermé.
Dans un espace métrique $(E; d)$, soient deux parties disjointes non vides : F fermé et G compact. On note $d(F; G) = \inf\{d(x; y) \mid x \in F; y \in G\}$. Montrer que $d(F; G) > 0$.

Exercice 3 Compacts dans R^n.
À l'aide d'arguments élémentaires, dire si les espaces suivants sont compacts ou non (pour la topologie usuelle, tout espace de matrices $M_{p;q}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}^{pq}$).
1. La sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$.
2. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
3. Le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1.
4. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Premier théorème de Dini et équicontinuité.
1. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction continue. Montrer cette convergence est automatiquement uniforme.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dénies sur un compact K et à valeurs dans un espace métrique $(E; d)$. On suppose qu'en tout point $x \in K$, la suite $(f_n)_n$ est équicontinue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall y \in V; \forall n \in \mathbb{N}; d(f_n(x); f_n(y)) < \varepsilon$$

Montrer que si $(f_n)_n$ converge simplement alors elle converge uniformément.
3. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur espace topologique X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction continue. Montrer que $(f_n)_n$ est équicontinue en tout point $x \in X$.
4. Retrouver grâce aux questions 2 et 3 le résultat de la question 1.

Exercice 5 Nombre de Lebesgue d'un recouvrement.
Soit X un espace compact et U_i, $i \in I$ un recouvrement ouvert de X. Montret qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i_x \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_i$.