TD6 : Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$

1 Quelques quadriques

1.1 Ellipsoïde

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(E): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (E).
d) Proposer une paramétrisation (penser aux coordonnées sphériques).
e) Donner l'équation du plan tangent au point $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$.

1.2 Hyperboloïde à une nappe

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(H_1): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (H_1).
d) En utilisant que $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$, proposer une paramétrisation de (H_1).
e) Donner l'équation du plan tangent au point $(2a, 0, c\sqrt{3})$.

1.3 Hyperboloïde à deux nappes

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(H_2): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (H_1).
d) En utilisant que $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$, proposer une paramétrisation de $(H_2) \cap \{z > 0\}$.

1.4 Paraboloïde elliptique

Soient $a, b > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(PE): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (PE).

1.5 Paraboloïde hyperbolique

Soient $a, b > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(PH): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$ et avec le plan $x = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (PH).

1.6 Cône

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(C): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (C).
d) Proposer une paramétrisation (penser aux coordonnées cylindriques).

1.7 Écrit du capes

Les quadriques sont de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$$

De l'écrit du capes : on note $\mathcal{R}_0$ le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère

$$(Q): \quad x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z = 0,$$

et on cherche à déterminer sa nature (ainsi que celle de son intersection avec le plan $P : z = 0$).

a) Soit $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \vec{k}$. Trouver $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit S le point de coordonnées $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5})$ dans $\mathcal{R}_0$. On note $\mathcal{R}$ le repère orthonormé $(S, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Soit un point M : on note (x, y, z) ses coordonnées dans $\mathcal{R}_0$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. Exprimer les relations entre ces deux jeux de coordonnées.

c) En déduire l'équation de (Q) dans $\mathcal{R}$: quelle est sa nature ?

d) (pas dans le sujet du capes) : pourquoi était-ce naturel de considérer ces vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2 Lieux de points, plans tangents

2.1 Intersection d'un cône et d'un plan

a) Soit S la surface d'équation $x^2+y^2=z^2$ et P le plan d'équation $2x+3y=z$. Démontrer que l'intersection $S\cap P$ est un couple de droites dont on déterminera l'angle.
b) Et si on coupe S par le plan $P' : x+y+z=1$?

2.2 Condition géométrique sur le plan tangent

Déterminer les points de la surface d'équation $xy=z^3$ dont le plan tangent contient la droite $(x=2, y-3z+3=0)$.

3 Optimisation et fonctions implicites

3.1 Optimisation sans fonctions implicites

3.1.1 Extrema sur un ouvert

Étudier les extrema (relatifs et absolus) de $f(x,y = x^4+y^4-2(x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.1.2 Extrema sur un fermé

Déterminer les extremums de $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ sur $[0,1]^2$ et sur $C(O,1)$.

3.1.3 Aire et volume d'un parallélépipède rectangle

a) On considère la fonction

$$f :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad f(a,b)=ab+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$$

Étudier les extrema éventuels de f.
Application : montrer par le calcul qu'à volume fixé, le parallélépipède rectangle d'aire minimale est un cube.
b) Déterminer de même le volume maximal et la forme d'un parallélépipède rectangle dont les sommets sont contraints à appartenir à une sphère de rayon 1.

3.2 Fonctions implicites

3.2.1 Applications directes des fonctions implicites

a) Donner l'allure de $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^4+y^3-x^2-y^2+x-y=0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.
b) Soit

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1;$$

montrer que $f(x, y) = 0$ définit au voisinage de $(0, 1)$ une fonction implicite $y = \phi(x)$, et donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en 0.

c) Soit
$$g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z - 1;$$
montrer que $g(x, y, z) = 0$ définit au voisinage de $(0, 0, -1)$ une fonction implicite $z = \phi(x, y)$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(0, 0)$.

3.3 Optimisation sous contrainte(s)

On considère le point $A = (1, 2, 3)$ et la sphère unité de $\mathbb{R}^3$: $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Quel est le point de la sphère unité le plus proche de A ?

b) On considère aussi le plan $P : x + y + z = 0$; quel est le point de $S \cap P$ le plus proche de A ?

4 Changements de variables, aires et volumes

4.1 Longueur, aire, volume, centre d'inertie

On considère le domaine plan
$$D = \{(x, y), x \geq 0, y \leq 3, y \geq 2x^2\},$$
et la surface
$$S = \{(x, y, z), (x, y) \in D, z = x + y\}.$$

a) Dessiner D, et calculer son aire et son périmètre.

b) Calculer $\iint_D (x + y)\, dx\, dy$. Quelle en est l'interprétation en terme de volume ?

c) Déterminer la surface de S.

d) Déterminer le centre d'inertie G défini par
$$\Big(\iint_D 1\, dx\, dy\Big)\vec{OG} = \iint_D \vec{OM}\, dx\, dy.$$

4.2 Coordonnées polaires, changements de variables

Soient $\Omega =]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$ et $P : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par $P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Montrer que P est un C^1 difféomorphisme de Ω sur son image (à déterminer).

b) Calculer le Jacobien de cette application.

c) Supposons f de classe C^1 sur $P(\Omega)$ et posons $\varphi = f \circ P$. Calculer $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de φ (autrement dit, exprimer l'opérateur différentiel $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ en coordonnées polaires).

4.3 Aire contenue dans une ellipse, volume contenu dans un ellipsoïde

a) Soit $a, b > 0$. On considère
$$(E_2) = \{(x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$
Déterminer son aire. On pourra considérer le changement de variable $(r, \theta) \mapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta)$.

b) Soit $a, b, c > 0$. On considère
$$(E_3) = \{(x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$
Déterminer son volume.