Université Paul Sabatier
L3 Enseignement, module Analyse 2

Année 2018–2019
Semestre 6

TD6 : Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$

1 Quelques quadriques

1.1 Ellipsoïde

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(E): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (E).
d) Proposer une paramétrisation (penser aux coordonnées sphériques).
e) Donner l'équation du plan tangent au point $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$.

1.2 Hyperboloïde à une nappe

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(H_1): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (H_1).
d) En utilisant que $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$, proposer une paramétrisation de (H_1).
e) Donner l'équation du plan tangent au point $(2a, 0, c\sqrt{3})$.

1.3 Hyperboloïde à deux nappes

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(H_2): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (H_1).
d) En utilisant que $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$, proposer une paramétrisation de $(H_2) \cap \{z > 0\}$.

1.4 Paraboloïde elliptique

Soient $a, b > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(PE): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (PE).

1.5 Paraboloïde hyperbolique

Soient $a, b > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(PH): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$ et avec le plan $x = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (PH).

1.6 Cône

Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ensemble des points qui vérifient

$$(C): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

a) Étudier son intersection avec le plan $y = 0$.
b) Soit z_0. Étudier son intersection avec le plan $z = z_0$.
c) Représenter (C).
d) Proposer une paramétrisation (penser aux coordonnées cylindriques).

1.7 Écrit du capes

Les quadriques sont de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$$

De l'écrit du capes : on note $\mathcal{R}_0$ le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère

$$(Q): \quad x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z = 0,$$

et on cherche à déterminer sa nature (ainsi que celle de son intersection avec le plan $P : z = 0$).

a) Soit $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \vec{k}$. Trouver $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit S le point de coordonnées $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5})$ dans $\mathcal{R}_0$. On note $\mathcal{R}$ le repère orthonormé $(S, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Soit un point M : on note (x, y, z) ses coordonnées dans $\mathcal{R}_0$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. Exprimer les relations entre ces deux jeux de coordonnées.

c) En déduire l'équation de (Q) dans $\mathcal{R}$: quelle est sa nature ?

d) (pas dans le sujet du capes) : pourquoi était-ce naturel de considérer ces vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2 Lieux de points, plans tangents

2.1 Intersection d'un cône et d'un plan

Soit S la surface d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ et P le plan d'équation $x + y = z$. Démontrer que l'intersection $S \cap P$ est un couple de droites dont on déterminera l'angle.

2.2 Condition géométrique sur le plan tangent

Soit S la surface d'équation $z = x + \sin y$. Déterminer le plan tangent à S au point $(1, \frac{\pi}{2}, 2)$.

3 Optimisation et fonctions implicites

3.1 Optimisation sans fonctions implicites

3.1.1 Extrema sur un ouvert

Étudier les extrema (relatifs et absolus) de $f(x, y = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.1.2 Extrema sur un fermé

Déterminer les extremums de $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur $[0,1]^2$ et sur $C(O, 1)$.

3.1.3 Aire et volume d'un parallélépipède rectangle

On considère la fonction

$$f :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad f(a, b) = ab + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}.$$

Étudier les extrema éventuels de f.

Application : montrer par le calcul qu'à volume fixé, le parallélépipède rectangle d'aire minimale est un cube.

3.2 Fonctions implicites

3.2.1 Applications directes des fonctions implicites

a) Donner l'allure de $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

b) Soit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1;$$

montrer que $f(x, y) = 0$ définit au voisinage de $(0, 1)$ une fonction implicite $y = \phi(x)$, et donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en 0.

3.3 Optimisation sous contrainte(s)

On considère le point $A = (1, 2, 3)$ et la sphère unité de $\mathbb{R}^3$: $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
a) Quel est le point de la sphère unité le plus proche de A ?
b) On considère aussi le plan $P : x + y + z = 0$; quel est le point de $S \cap P$ le plus proche de A ?

4 Changements de variables, aires et volumes

4.1 Longueur, aire, volume, centre d'inertie

On considère le domaine plan

$$D = \{(x, y), x \geq 0, y \leq 3, y \geq 2x^2\},$$

et la surface

$$S = \{(x, y, z), (x, y) \in D, z = x + y\}.$$

a) Dessiner D, et calculer son aire et son périmètre.
b) Calculer $\iint_D (x + y)\, dx\, dy$. Quelle en est l'interprétation en terme de volume ?
c) Déterminer la surface de S.
d) Déterminer le centre d'inertie G défini par

$$\Big(\iint_D 1\, dx\, dy\Big)\vec{OG} = \iint_D \vec{OM}\, dx\, dy.$$

4.2 Aire contenue dans une ellipse, volume contenu dans un ellipsoïde

a) Soit $a, b > 0$. On considère

$$(E_2) = \{(x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Déterminer son aire (on pourra travailler en cartésiennes ou considérer le changement de variable $(r, \theta) \mapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta)$).
b) Soit $a, b, c > 0$. On considère

$$(E_3) = \{(x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Déterminer son volume.