Exercices de topologie.

Exercice 1 Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques. Soit $f : E$ une application uniformément continue. Montrer que l'image de toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de points de E est une suite de Cauchy de E'. Montrer en outre que si f est bijective et si f^{-1} est continue, alors si E' est complet, E l'est aussi.

Exercice 2 Soit (E,d) un espace métrique et A une partie compacte et bornée de E. Montrer qu'il existe a et b tels que $d(a,b) = \delta(A)$ (diamètre de A).

Exercice 3 Soit (E,d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante pour l'inclusion de sous-ensembles fermés non vides de E, telle que $lim_n \delta(F_n) = 0$. Montrer que $\cap_n F_n$ est un singleton.

Exercice 4 Montrer que $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$ n'est pas complet.

Exercice 5 Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que
E est compact $\iff$ Toute suite décroissante d'ensembles fermés non vides a une intersection non vide.

Exercice 6 E étant un espace métrique complet et f étant une application de E dans E, montrer que si une puissance positive f^q de f est contractante, alors f possède un point fixe et un seul. Montrer également que toute suite récurrente du type $x_{n+1} = f(x_n)$, de terme initial quelconque converge vers le point fixe de f.

Exercice 7 Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$. On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (1/4\sin(x+y), 1+2/3\arctan(x-y))$.
Démontrer qu'il existe une constante $k \in]0,1[$ telle que, quels que soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a $\|f(x,y) - f(x',y')\|_1 \leqslant k\|(x,y)-(x',y')\|_1$. En déduire que le système $(1/4\sin(x+y), 1+2/3\arctan(x-y)) = (x,y)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$. Aurait-on pu appliquer la même méthode en utilisant la norme $\|.\|_\infty$ au lieu de la norme $\|.\|_1$?

Exercice 8 Montrer que le système $(x_1,x_2) = (\frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2), \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2))$ admet une solution unique $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.