```
%%%%*************************        Texte LaTeX du TDO 9


\documentclass{article}
% \documentclass[11pt]{article}    si on veut des caractères
plus grand



\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}                % autre package
possible :\usepackage[frenchb]{babel}
\usepackage[francais]{babel}            % autre package
possible \usepackage[latin1]{inputenc}

\usepackage{amssymb,amsmath,mathrsfs}  % pour avoir des
caractères indispensables en math

\textwidth=168mm      %%% largeur du texte
\textheight=244 mm    %%% longueur du texte
\voffset=-28  mm     %%%  marge à gauche
\hoffset=-20 mm      %%%  marge en haut


\usepackage[pdftex]{graphicx}           % pour compiler
directement en pdf
\usepackage{graphicx}                   % et inclure dessins,
photos, graphiques,...



\newtheorem{theo}{Théorème}            %%% Environnement pour
les Théorèmes
\newtheorem{prop}{Proposition}         %%% Environnement pour
les Propositions
\newtheorem{defnt}{Définition}         %%% Environnement pour
les Définitions

\newtheorem{rmq}{Remarque}             %%% Environnement pour
les Remarques
\newtheorem{rmqs}[rmq]{Remarques}      %%% avec le même compteur
                                       %%% si on veut faire
```

```
plusieurs remarques...



\def\ccB{\mathscr{B}}     %%% alphabets avec une
calligraphie

\def\im{{\rm Im}\:}          %%% racoourci pour Im
\def\ker{{\rm Ker}\:}        %%% racoourci pour Ker


%%% raccourci pour écrire la norme d'un vecteur :

\def\norm#1{{\left\vert\left\vert#1\right\vert\right\vert}}



%%%%% raccourci pour un vecteur colonne à 3 composantes :

\def\vccc#1#2#3{{\left(\begin{array}{c}
#1 \\
#2 \\
#3
\end{array}\right)}}





\begin{document}      %%% ça y est, ça commence !

{\large
\noindent {\sc Universit\'e Paul Sabatier  }
\hfill 2018-2019 / semestre 1
\vspace{1 mm}

\noindent Licence L3 E  \hfill TD ordinateurs
}
\vspace{12 mm}

\centerline{\LARGE TDO 9 : introduction à \LaTeX }
\vspace{10 mm}
```

```
\framebox{\begin{minipage}{15cm}
\textsc{Commentaire} :  Cette séance est une introduction au
langage \LaTeX ~ qui s'est imposé comme
la référence pour écrire des textes de mathématiques. Le but
de cette séance
est de découvrir les premières notions de \LaTeX ~ en
reproduisant dans le
fichier \texttt{fichier-presque-vide.tex} (que chacun peut
renommer
à sa guise) le texte permettant d'afficher ce texte que vous
avez sous les yeux
(à l'exception de ce commentaire). Vous pouvez directement
aller voir
le "fichier source" \texttt{fichier-exemple-LaTeX
\_TD0-9.tex}
pour comprendre les commandes de base.
\end{minipage}}
\vspace{18 mm}


\centerline{\LARGE Projections et symétries orthogonales}
\bigskip


\tableofcontents

\section{Projections (ou projecteurs)}

\subsection{Cas général}


On se place dans un espace vectoriel euclidien $(E,<~,~>)$
dont $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels.
\medskip



\noindent  {\bf Rappel :}   Si $E=F\oplus G$, alors tout
\'el\'ement $x$
de $E$ admet une \'ecriture unique de la forme $x_F+x_G$
avec $x_F\in F$
et $x_G \in G$.  L'application $p_{F,G} :E \to E \:, ~
x\mapsto x_F$ est la projection sur $F$,
```

```latex
parall\`element \`a $G$.

On notera que si $p$ est une projection, alors $p^2:=p \circ
p =p$.
R\'eciproquement, si $p \in {\rm End}(E)$ v\'erifie $p^2=p$,
alors $p=p_{F,G}$
avec avec $F=\im p$ et $G=\ker p$.


\begin{rmq}\label{rmq-lien-entre-pF-et-pG}
On notera encore que $p_{G,F}={\rm Id} -p_{F,G}$.
\end{rmq}




\subsection{Projections orthogonales}




\begin{defnt} Soit $(E,<~,~>)$ un espace vectoriel euclidien
et $F$ un sous-espace vectoriel  de $E$. La projection
$p_{F,F^{\perp}}$
est appelée \texttt{projection orthogonale sur $F$}. Elle
sera notée $p_F$.
\end{defnt}

\begin{prop}
Soit $(E,<~,~>)$ un espace vectoriel euclidien
et $F$ un sous-espace vectoriel  de $E$.
Pour tout vecteur $u$ de $E$,
$$d(u,F)=\norm{u-p_F(u)}$$
\end{prop}

\begin{rmqs}
\begin{enumerate}
\item  Cela signifie que l'on a également $d(u,F)=
\norm{p_{F^{\perp}}(u)}$.
\item Et ici, on note que le compteur de l'environnement
\texttt{Remarque} est
aussi celui de  \texttt{Remarques}.
\end{enumerate}
```

```
\end{rmqs}



\begin{theo}[Ecriture de la projection orthogonale dans une
base orthonomée]
\label{theo-cacul-de-la-projection}
Si $\ccB=(f_1,\ldots,f_k)$ est une base orthonormée de $F$,
alors~:
$$\forall u \in E\:,~ p_F(u)=\sum_{i=1}^k <f_i,u> f_i$$
\end{theo}


\section{Symétries}

\subsection{Cas général}

\noindent  {\bf Rappel :}   Si $E=F\oplus G$, alors tout
élément $x$
de $E$ admet une écriture unique de la forme $x_F+x_G$ avec
$x_F\in F$
et $x_G \in G$.  L'application $s_{F,G} :E \to E \:, ~
x\mapsto x_F-x_G$ est la symétrie par rapport à  $F$,
parall\`element \`a $G$.

On notera que si $s$ est une symétrie, alors $s^2:=s\circ s
={\rm Id}_E$.
Réciproquement, si $s \in {\rm End}(E)$ vérifie $s^2={\rm
Id}$,
alors $s=s_{F,G}$  avec $F=\ker (s-{\rm Id})$ et $G=\ker (s
+{\rm Id})$.


\subsection{Sym\'etries orthogonales}


\begin{defnt} Soit $(E,<~,~>)$ un espace vectoriel euclidien
et $F$
un sous-espace vectoriel  de $E$. La symétrie
$s_{F,F^{\perp}}$
est appelée \texttt{symétrie orthogonale par rapport à  $F
$}.
Elle sera notée $s_F$.
\end{defnt}
```

```latex
\begin{rmq} \label{rmq-passage-projection-symetrie}
Puisque $x_F-x_G=2x_F-(x_F+x_G)$, on peut déduire la
symétrie $s_F$ de $p_F$
(et réciproquement)~:
$$s_F=2p_F-{\rm Id}~~~~~~~~~{\rm et}~~~~~~~~~~p_F=\frac{s_F+
{\rm Id}}{2}$$
\end{rmq}




\begin{prop}  Soit $(E,<~,~>)$ un espace vectoriel euclidien
et $F$ un
sous-espace vectoriel  de $E$. Pour tout $u$ de $E$,
on a $\norm u =\norm{s_F(u)}$
($s_F$ est une isométrie).
\end{prop}


\section{Trois mani\`eres de calculer la matrice d'une
projection orthogonale}

Dans $E=\mathbb{R}^3$, on considère le plan $H$ d'équation
$$x-2y+z=0$$
On demande de calculer $M=M_{\mathcal{E}}(p_H)$ o\`u
$\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.


\subsection{Une 1ère méthode}

\noindent Cette 1ère méthode passe par le calcul de l'image
$p_H(u)$ d'un vecteur $u$ selon le Théorème
\ref{theo-cacul-de-la-projection}.

\begin{description}
\item[1ère étape : chercher une base orthonormée de $H$. ]
Il est clair que $(u_1,u_2)$ avec $u_1=\vccc{2}{1}{0}$
et $u_2=\vccc{1}{0}{-1}$ forme une base de $H$. On applique
le procédé
d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cete base.
On prend donc $\displaystyle v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\vccc{2}
{1}{0}$ et
$$  v_2=u_2-<u_2,v_1>v_1=
```

```latex
\vccc{1}{0}{-1}-\frac{1}{5}\left<\vccc{1}{0}{-1},\vccc{2}{1}
{0}\right>\vccc{2}{1}{0}
=\vccc{1}{0}{-1}-\frac{2}{5}\vccc{2}{1}{0}=
\frac{1}{5}\vccc{1}{-2}{-5}$$
Conclusion : $$\mathcal{H}=(v_1,v_2)~~~{\rm avec}~~~
v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\vccc{2}{1}{0}~~~{\rm et}~~~
v_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\vccc{1}{-2}{-5}$$
forme une base orthonormée de $H$.
\item[2ème étape : écriture de l'image d'un vecteur par $p_H
$. ]

Pour tout  $v=\vccc{x}{y}{z} \in \mathbb{R}^3$, on a~:
$$\begin{array}{rcl}
p_H(v)&=&<v,v_1>v_1 + <v,v_2>v_2\\
&=& \displaystyle
\frac{1}{5}\left<\vccc{x}{y}{z},\vccc{2}{1}{0}\right>
\vccc{2}{1}{0} +
\frac{1}{30}\left<\vccc{x}{y}{z},\vccc{1}{-2}{-5}\right>
\vccc{1}{-2}{-5}\\
&=& \displaystyle
\frac{2x+y}{5}\vccc{2}{1}{0} +
\frac{x-2y-5z}{30}\vccc{1}{-2}{-5}\\
&=& \displaystyle \frac{1}{6}\vccc{5x+2y-z}{2x+2y+2z}{-x+2y
+5z}
\end{array}
$$
\item[3ème étape : écriture de la matrice de $p_H$. ]
On déduit du dernier résultat que
$$M(p_H)~=~\frac{1}{6}~
\left(\begin{array}{ccc}
5&2&-1\\
2&2&2\\
-1&2&5
\end{array}
\right)
~~~{\rm car}~~~
\frac{1}{6}\vccc{5x+2y-z}{2x+2y+2z}{-x+2y+5z}
=
\frac{1}{6}~
\left(\begin{array}{ccc}
5&2&-1\\
2&2&2\\
-1&2&5
\end{array}
```

```
\right)
\:
\vccc{x}{y}{z}
$$
\end{description}

\subsection{Une 2ème méthode}
\noindent Une 2ème méthode, tenant compte de la
Remarque \ref{rmq-lien-entre-pF-et-pG}, passe par le calcul
de l'image
$p_{H^{\perp}}(v)$ de tout vecteur $v$.

\begin{description}
\item[1ère étape : chercher une base orthonormée de
$H^{\perp}$. ]
Il est clair que $(v_3)$ avec $$v_3=\frac{1}{\sqrt{6}}
\vccc{1}{-2}{1}$$
forme une base orthonormée de $H^{\perp}$.
\item[2ème étape : écriture de l'image d'un vecteur par
$p_{H^{\perp}}$
et par $p_H$ : ]
Pour tout  $v=\vccc{x}{y}{z} \in \mathbb{R}^3$, on a
$p_{H^{\perp}}(v)=<v,v_3>v_3$, soit~:
$$
p_{H^{\perp}}(v)=
\frac{1}{6}\left<\vccc{x}{y}{z},\vccc{1}{-2}{1}\right>
\vccc{1}{-2}{1}=
 \frac{1}{6}\vccc{x-2y+z}{-2x+4y-2z}{x-2y+z}
$$
et on en déduit que
$$p_H(v)=
v-p_{H^{\perp}}(v)=\vccc{x}{y}{z}-\frac{1}{6}\vccc{x-2y+z}
{-2x+4y-2z}{x-2y+z}
=\frac{1}{6}\vccc{5x+2y-z}{2x+2y+2z}{-x+2y+5z}$$
\item[3ème étape : écriture de la matrice $M(p_H)$. ] Comme
dans la 1ère méthode.
\end{description}

\subsection{Une 3ème méthode}

 \noindent Cette 3ème méthode ressemble à la 2ème
pusiqu'elle
utilise aussi la formule
$\displaystyle
```

```
p_H(v)=
v-p_{H^{\perp}}(v)=\vccc{x}{y}{z}-\frac{1}{6}\vccc{x-2y+z}
{-2x+4y-2z}{x-2y+z}$
mais on l'applique cette fois directement  aux vecteurs
$e_1,e_2$ et $e_3$
de la base canonique~:
\begin{itemize}
\item $\displaystyle
p_H(e_1)=\vccc{1}{0}{0}-\frac{1}{6}\vccc{1}{-2}{1}=\frac{1}
{6}\vccc{5}{2}{-1}$
\smallbreak
\item $\displaystyle
p_H(e_2)=\vccc{0}{1}{0}-\frac{1}{6}\vccc{-2}{4}{-2}=\frac{1}
{6}\vccc{2}{2}{2}$
\smallbreak
\item $\displaystyle
p_H(e_3)=\vccc{0}{0}{1}-\frac{1}{6}\vccc{1}{-2}{1}=\frac{1}
{6}\vccc{-1}{2}{5}$
\end{itemize}
\smallskip
\medbreak
\noindent dont on déduit aussitôt
$\displaystyle M(p_H)~=~\frac{1}{6}~
\left(\begin{array}{ccc}
5&2&-1\\
2&2&2\\
-1&2&5
\end{array}
\right)
$

\section{Pour aller plus loin}

\noindent Quelques références en algèbre linéaire et
géométrie,
utiles pour la L3E et pour le CAPES :
\cite{esc}, \cite{grif}, \cite{ladeg},  \cite{mon}.

\section{Et on peut aussi insérer des images}




\begin{figure}[!ht]
```

```
   \begin{minipage}[c]{.46\linewidth}
      \includegraphics[width=8cm]{page-intranet-UPS.png}
      \caption{Page intranet de l'UPS}
   \end{minipage} \hfill
   \begin{minipage}[c]{.46\linewidth}
      \includegraphics[width=8cm]{proportions-de-
faces_TDO7.pdf}
      \caption{Un exercice du TDO 7}
   \end{minipage}
\end{figure}

Dans le cas ci-desssus, on a utilisé l'environnement
\texttt{minipage} pour insérer les deux figures côte-à-côte
;
il n'est pas nécessaire si on veut insérer une seule figure.

\begin{thebibliography}{9}
\bibitem[LAD]{ladeg}  Ladegaillerie Y.,
\textsc{Géométrie pour le CAPES de Mathématiques},
Ellipse, 2004.

\bibitem[GRI]{grif}  Grifone J.,
\textsc{Algèbre linéaire},
Cépadues, 2015.

\bibitem[ESC]{esc}
Escoffier J.-P.,
\textsc{Toute l'algèbre de la licence},
Dunod, 2016.

\bibitem[MON]{mon}
Monier J.-M.,
\textsc{Algèbre et géométrie PC-PSI-PT},
Dunod, 2008.

\end{thebibliography}

\end{document}
```