Université Paul Sabatier
L3 MAF 2015-2016
Topologie et analyse Hilbertienne

Ce polycopié a été élaboré progressivement à partir de celui de 2012, dû à Anne Cumenge
Anne Bauval

Dates et commentaires des mises à jour successives :
- 21/09/2015 : première mise à jour de la version de l'année précédente (chap. 1 et 2) + annales des devoirs et examens des 2 dernières années, sauf ceux de janvier pour l'instant
- 16/11/2015 : ajouts dans le chap. 5 + 1 livre en biblio + feuilles de TD + mis en page et complété les annales (dont : rectif et compléments dans le corrigé du partiel de novembre 2013, et énoncé + corrigé du dernier partiel)
- 1/12/2015 : mises en forme mineures + DM à rendre le 9/12
- 16/12/2015 :
  - corrigés du DM, du DS et des examens de janvier 2015 et janvier 2014 ;
  - améliorations dans la partie II :
    - fignolages,
    - exemples à la fin des sections 6.3 et 6.6,
    - tout hyperplan est soit fermé, soit dense,
    - preuve du th. de Fréchet-von Neumann-Jordan (section 7.2).
  - appendices 2 et 3 (Hahn-Banach et Riesz).
- 13/6/2016 : énoncé et corrigé de l'examen de janvier 2016

Table des matières

Première partie

Topologie générale

Chapitre 1

Rappels minimaux

1.1 Dénombrabilité

Soient A et B deux ensembles. Nous dirons que :

- l'ensemble A a moins d'éléments que B (au sens large), ou A est **subpotent** à B, s'il existe une injection de A dans B. Avec l'axiome du choix, que nous utiliserons toujours implicitement dans notre pratique naïve de la théorie des ensembles, cela équivaut à l'existence d'une surjection de B dans A (sauf *bien sûr* si $A = \varnothing$ et $B \neq \varnothing$).
- l'ensemble A a autant d'éléments que B si chacun est subpotent à l'autre. D'après le théorème de Cantor-Bernstein, cela revient à dire qu'ils sont **équipotents**, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

Un ensemble D est dit **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$ et **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable, autrement dit s'il est subpotent à $\mathbb{N}$.

Une **famille** d'éléments de E indexée par un ensemble I est une application de I dans E. (L'ensemble de ces applications est souvent noté E^I.) Elle est dite dénombrable si I l'est. Se donner une famille dénombrable revient donc à se donner une suite infinie, de même que se donner une "famille finie" indexée par un ensemble à n éléments revient à se donner un n-uplet.

La **réunion et** l'**intersection d'une famille d'ensembles** sont définies par :

$$\cup_{i\in I} E_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in E_i\} \text{ et } \cap_{i\in I} E_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in E_i\}.$$

Si $I = \varnothing$, la réunion est donc vide (mais l'intersection n'est pas définie).

Le **produit** $\prod_{i\in I} E_i$ d'une telle famille est l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments dont chacun appartient au E_i correspondant. Si tous les E_i sont égaux à un même ensemble E, ce produit est simplement E^I. Si $I = \varnothing$, le produit est un singleton.

L'expression **produit ou union ou intersection dénombrable** d'ensembles signifie produit ou union ou intersection d'une famille dénombrable d'ensembles qui, eux, sont quelconques. De même en remplaçant "dénombrable" par "fini" ou (intersection exclue) par "vide".

Il existe des analogues des propositions suivantes, en remplaçant "dénombrable" par "au plus dénombrable", plus utiles, et qui s'en déduisent facilement.

Proposition 1.1
Tout produit **fini** *non vide d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exemples : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, le corps des nombres algébriques (les racines complexes de polynômes non nuls à coefficients rationnels : souvent noté $\overline{\mathbb{Q}}$, mais cette notation est réservée dans ce cours à l'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, qui est égale à $\mathbb{R}$, voir plus loin).

Théorème 1.2 (théorème de Cantor).
Tout ensemble E a strictement moins d'éléments que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties.
En particulier, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car il est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Plus précisément : on montre facilement (par l'absurde) qu'il n'existe aucune surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Corollaire 1.3 *Un produit dénombrable d'ensembles dénombrables n'est pas dénombrable.*

En effet, même le produit seulement des paires $D_n = \{0,1\}$ n'est pas dénombrable, car $\prod_{n\in\mathbb{N}} D_n = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, or (exercice facile) $\{0,1\}^E$ est équipotent à $\mathcal{P}(E)$.

1.2 Caractérisation de $\mathbb{R}$

Bibliographie sur diverses définitions de $\mathbb{R}$:
- par les coupures de Dedekind (comme, implicitement, ici) : Saint-Raymond ; Valiron, *Théorie des fonctions* ; Jean Gounon, `http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/logique/RviaDedekind.pdf` ;
- par le procédé de Cantor (en quotientant l'espace des suites "de Cauchy" *en un certain sens*, fatalement différent a priori de celui de ce cours, qui pour parler de distance suppose $\mathbb{R}$ construit) : Wagschal ; Doukhan-Sifre, *Analyse pour l'agrégation* ;
- voir aussi Queffélec (définition axiomatique incluant la propriété des segments emboîtés).

Définition 1.4 *À isomorphisme près, $\mathbb{R}$ est l'unique corps*[1] *totalement ordonné*[2] *vérifiant la propriété de la borne supérieure, c'est-à-dire dans lequel tout ensemble non vide et majoré possède une borne supérieure, i.e. un plus petit majorant.*

On en déduit facilement :
- le **théorème de la limite monotone** (toute suite réelle croissante et majorée converge), puis
- le théorème des suites adjacentes (qui sera généralisé par le théorème 3.21 des fermés emboîtés et le théorème 4.5 des compacts emboîtés)

mais surtout, grâce au lemme des pics (dans un ensemble totalement ordonné, toute suite possède une sous-suite monotone[3]) :
- le **"théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles"** (toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente), dont nous déduirons – section 3.5 – la complétude de $\mathbb{R}$ et – corollaire 4.14 – la compacité de tout segment réel $[a, b]$. La compacité sera une propriété purement topologique. La complétude sera plus spécifiquement liée à une distance, mais dans $\mathbb{R}$, une partie (donc aussi une suite) sera bornée pour la distance usuelle si et seulement si elle est bornée pour l'ordre.

Du théorème de la limite monotone on déduit aussi que dans $\mathbb{R}$, la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Cette propriété se reformule de multiples façons :

---

1. C'est-à-dire muni d'une addition $+$ qui fait de $(K, +)$ un groupe abélien et d'une multiplication $\times$ associative, distributive par rapport à l'addition, et possédant un élément neutre – ce qui fait de$(K, +, \times)$ un anneau unifère – et tel que dans cet anneau, tout élément non nul soit inversible.

2. C'est-à-dire muni d'un ordre $\leq$ à la fois total et compatible avec l'addition ($x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$) et la multiplication ($x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$).

3. *Démonstration du lemme des pics.* Par analogie avec, dans le cas d'une suite réelle, le graphique en bâtons verticaux de la suite, éclairé horizontalement depuis l'infini à droite, disons qu'un terme de la suite est éclairé s'il est strictement supérieur à tous les suivants, et qu'il est dans l'ombre sinon. S'il y a une infinité de termes éclairés, ils forment une sous-suite décroissante. S'il n'y en a qu'un nombre fini alors, au-delà du dernier, chaque terme de la suite est dans l'ombre d'un certain suivant, ce qui permet de proche en proche de construire une sous-suite croissante. $\square$

Définition 1.5 *Une partie A d'un ensemble ordonné E est dite dense pour l'ordre si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E tels que $x < y$, il existe au moins un élément a de A tel que $x < a < y$.*

(Il existe alors en fait une infinité de tels a, en itérant.) Quand l'ordre sur E est total, dire que A est dense pour cet ordre se résume par : "entre deux éléments de E distincts, il y a toujours un élément de A".

Proposition 1.6 *Dans tout corps totalement ordonné K, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la suite $(1/n)$ converge (en définissant dans K la convergence des suites comme dans $\mathbb{R}$, avec ici des $\varepsilon > 0$ dans K) ;*
2. *la suite $(1/n)$ converge vers 0 ;*
3. *le sous-corps $\mathbb{Q}$ est dense pour l'ordre dans K ;*
4. *Tout élément de K possède une partie entière, c'est-à-dire que pour tout $x \in K$, il existe un entier relatif m tel que $m \leq x < m + 1$.*
5. *Le corps K est archimédien, c'est-à-dire que pour tout élément x de K, il existe un entier naturel n tel que $x < n$, autrement dit : $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant dans K.*

Démonstration. ($2 \Rightarrow 1$ est immédiat.)

- $1 \Rightarrow 5$: si $1/n \to \ell$ alors $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \to \ell - \ell = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ dans K, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ (en fait : tous les entiers à partir d'un certain rang) tel que $\frac{1}{n(n+1)} < \varepsilon$. Donc pour tout $x > 0$ dans K, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x < m$ (prendre $m = n(n+1)$ pour le n correspondant à $\varepsilon = 1/x$). Pour tout $x \leq 0$ aussi (prendre $m = 1$).
- $5 \Rightarrow 4$: pour K archimédien et $x \in K$, l'ensemble des entiers relatifs $\leq x$ est non vide et majoré donc possède un plus grand élément m, qui vérifie bien $m \leq x < m + 1$.
- $4 \Rightarrow 3$: dans K vérifiant 4, soient $a < b$. On choisit des entiers p, q tels que

  $$q > 1/(b - a) \quad \text{et} \quad p - 1 \leq aq < p,$$

  par exemple (en notant $\lfloor\ \rfloor$ la partie entière) : $q = \lfloor 1/(b - a) \rfloor + 1$ puis $p = \lfloor aq + 1 \rfloor$. On a alors

  $$q > 0 \quad \text{et} \quad aq < p \leq aq + 1 < bq \quad \text{donc} \quad a < p/q < b.$$
- $3 \Rightarrow 2$: si $\mathbb{Q}$ est dense alors, pour tout $\varepsilon > 0$ dans K, il existe des entiers $q > 0$ et p tels que $0 < p/q < \varepsilon$, d'où $\forall n \geq q, 0 < 1/n \leq 1/q \leq p/q < \varepsilon$, ce qui prouve que $1/n \to 0$. □

Par conséquent, $\mathbb{Q}$ est dense pour l'ordre dans $\mathbb{R}$. Cette notion de densité liée à l'ordre aura pour conséquence une autre notion de densité, liée à la topologie de cet ordre (corollaire 2.23).

Corollaire 1.7 *Le sous-ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense pour l'ordre dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient $a < b$ deux réels. Choisissons un irrationnel positif α (par exemple la racine carrée de 2). Il existe un rationnel non nul r tel que $a/\alpha < r < b/\alpha$, donc il existe un irrationnel s $(= r\alpha)$ tel que $a < s < b$. □

Exercice. Sur le corps de fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$, on définit $\leq$ par : $F(X) \leq G(X)$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $t \geq M, F(t) \leq G(t)$. Vérifier que c'est un ordre total, compatible avec $+$ et $\times$ et que ce corps, ainsi totalement ordonné, n'est pas archimédien.

Chapitre 2

Espace topologique

2.1 Définition et exemples

On peut définir sur $\mathbb{R}$ (ou sur d'autres ensembles ordonnés usuels) ce qui sera le prototype d'une topologie :

Définition 2.1 Topologie de l'ordre *Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Les intervalles ouverts de E sont les parties de l'une des cinq formes suivantes (avec $a, b \in E$) :*
- *$\varnothing$,*
- *$]a, b[:= \{x \in E \mid a < x < b\}$,*
- *$\{x \in E \mid x < b\}$,*
- *$\{x \in E \mid a < x\}$,*
- *E.*

Les ouverts de E sont les réunions d'intervalles ouverts.

Remarques.
- Si E n'a pas de plus grand ni de plus petit élément (par exemple si $E = \mathbb{R}$), les intervalles du deuxième et du troisième type sont notés $]-\infty, b[$ et $]a, +\infty[$. Mais si $E =$ la "droite réelle achevée" $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (avec $-\infty < \mathbb{R} < +\infty$), ils sont égaux à $[-\infty, b[$ et $]a, +\infty]$.
- Par définition, une réunion quelconque (finie ou infinie) d'ouverts est encore un ouvert. C'est faux pour une intersection : par exemple dans $\mathbb{R}$, l'intersection des $]-1/n, 1/n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est $\{0\}$, qui n'est pas un ouvert, non pas "parce qu'il est fermé" (cf. exercice 2.13) mais parce que dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert non vide est infini (cf. proposition 1.6) donc tout ouvert non vide aussi.

On aura au §2.7 une approche de la topologie équivalente mais plus intuitive car plus "locale". L'avantage de la présente approche est de se prêter facilement à l'axiomatisation. On vérifie en effet immédiatement – du fait que l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert – que la topologie de l'ordre a les propriétés suivantes :

Définition 2.2 Axiomes d'une topologie *Une topologie sur un ensemble E est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de E, appelés les ouverts de l'*__espace topologique__ *$(E, \mathcal{T})$, tel que :*
- *$\varnothing$ et E sont ouverts ;*
- **toute** *réunion d'ouverts est un ouvert ;*
- *toute intersection* **finie** *non vide d'ouverts est un ouvert.*

(Lorsque la topologie $\mathcal{T}$ sur E est implicitement fixée, on dit aussi "l'espace topologique E" et "les ouverts de E".)

La topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ vient d'être définie à partir de l'ordre ; on verra plus loin que la *même* topologie peut être définie à partir de la distance usuelle $|x - y|$ entre deux réels x et y.

Exemples. Voici d'autres exemples d'espaces topologiques :

- la topologie induite sur une partie X d'un espace topologique E : ses ouverts sont les ensembles de la forme $U \cap X$, pour tout ouvert U de E. Par exemple dans $[-1,1]$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$, l'intervalle "semi-ouvert" $]0,1]$ est bel et bien un ouvert.
- la topologie grossière sur un ensemble E : celle dont les seuls ouverts sont $\varnothing$ et E
- la topologie discrète sur E : celle dont les ouverts sont toutes les parties de E.
- la topologie cofinie sur E : celle dont les ouverts sont $\varnothing$ et les parties cofinies (i.e. de complémentaire fini).
- la topologie de l'ordre sur n'importe quel ensemble totalement ordonné, en particulier :
  - la topologie de l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$. Cet ensemble ordonné est isomorphe au segment $[-1,1]$ muni de l'ordre usuel, donc les topologies de l'ordre sur ces deux ensembles sont "identiques", via la bijection qui transporte l'ordre : on dira que les deux espaces topologiques sont homéomorphes.
  - la topologie de l'ordre sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}$: ses ouverts sont *(exercice)* les parties cofinies ou ne contenant pas $+\infty$. Cette topologie permettra de considérer la notion de limite de suite comme un cas particulier de celle de limite de fonction.

Exercice. Soient E un espace topologique et X une partie de E, munie de la topologie induite. Montrer que tout ouvert de E inclus dans X est un ouvert de X, et que la réciproque est vraie si et seulement si X est un ouvert de E.

Définition 2.3 *Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur un même ensemble E. On dit que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$ si elle a plus d'ouverts, autrement dit si $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.*

Les topologies discrète et grossière sur E sont donc respectivement la plus fine et la moins fine.
Exercice. Pour toute partie Y d'un ensemble totalement ordonné X, on peut munir Y de deux topologies : la topologie $\mathcal{T}_{ord}$ de l'ordre sur Y (restriction de l'ordre sur X) et la topologie $\mathcal{T}_{|Y}$ induite par la topologie (de l'ordre) sur X. ($\mathcal{T}_{|Y}$ est toujours plus fine que $\mathcal{T}_{ord}$, puisque les ouverts de $\mathcal{T}_{ord}$ sont les réunions d'intervalles ouverts de Y, et chacun est l'intersection par Y d'un intervalle ouvert de X.) Montrer que :
- les deux topologies sont identiques dans les trois exemples suivants : $Y = [-1,1] \subset X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R} \subset X = \overline{\mathbb{R}}$, $Y = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (ou $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$) $\subset X = \overline{\mathbb{R}}$;
- les deux topologies sont différentes pour $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\} \subset X = \mathbb{R}$ (ou $X = \overline{\mathbb{R}}$).

2.2 Voisinages

Définition 2.4 *Une partie V d'un espace topologique E est un voisinage d'un point a de E si V contient un ouvert contenant a. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.*

(L'ambiguïté du mot "contient" est toujours facile à lever au vu du contexte ; ici, la condition signifie : s'il existe un ouvert U tel que $a \in U$ et $U \subset V$.)
Exercice. Montrer que dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ muni de la topologie de l'ordre, les voisinages de $+\infty$ sont les parties contenant $+\infty$ et tous les entiers à partir d'un certain rang.

Il existe aussi (devoir surveillé d'octobre 2014, §11.9) une axiomatisation équivalente de la définition d'une topologie par l'ensemble des voisinages de chaque point, mais plus compliquée. Nous nous contenterons de remarquer quatre conséquences immédiates des définitions précédentes :
Remarque.

1. Tout voisinage de a contient a.
2. Tout surensemble d'un voisinage de a est un voisinage de a.
3. Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.
4. Tout ouvert contenant a est un voisinage de a.

(Les points 1, 2 et 4 résultent uniquement de la définition des voisinages. Le point 3 fait de plus appel au fait que toute intersection d'ouverts est un ouvert.)

Théorème 2.5 *Une partie U de E est un ouvert si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Pour tout ouvert U et tout élément a de U, U est un voisinage de a puisqu'il contient un ouvert (U lui-même) contenant a. Réciproquement, soit U une partie de E telle que pour tout $a \in U$, U est un voisinage de a. Il existe alors, pour chaque $a \in U$, un ouvert O_a contenant a et inclus dans U. La réunion O de ces ouverts est un ouvert, et U est égal à cet ouvert : $O \subset U$ car les O_a sont inclus dans U, et $U \subset O$ car $\forall a \in U$, $a \in O_a$ et $O_a \subset O$. □

Ainsi, quand on connaît les ouverts d'une topologie, on peut en déduire (par définition) les voisinages (de chaque point), mais inversement, quand on connaît les voisinages, on peut retrouver les ouverts (par la proposition ci-dessus). Il existe même une définition, équivalente à la définition 2.2 via ce va-et-vient, d'une topologie par les voisinages, soumis à certaines conditions, mais nous l'omettrons (la formulation et la preuve de l'équivalence sont un peu compliquées).

Définition 2.6 *Un espace topologique Y est dit* **séparé** *si deux points distincts possèdent des voisinages disjoints, ou encore : appartiennent à deux ouverts disjoints.*

Par exemple sur un ensemble totalement ordonné, la topologie de l'ordre est séparée. C'est cette propriété qu'on utilise, dans $\mathbb{R}$, pour démontrer l'unicité de la limite éventuelle d'une suite, ou d'une fonction en un point (la preuve de la proposition 2.34 sera calquée sur celle-là). Cette propriété de séparation sera aussi très utile pour prolonger des égalités de fonctions (proposition 2.42).

2.3 Adhérence, points adhérents

Définition 2.7 *Dans un espace topologique E, un point x est dit adhérent à* **une partie** *A si tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et noté $\overline{A}$.*

Remarque. Tout élément x de A est adhérent à A (puisque tout voisinage de x contient x), donc $A \subset \overline{A}$.

On peut distinguer deux types de points adhérents :

Définition 2.8 *Un point x adhérent à A est*
- **point isolé** *de A s'il existe un voisinage V de x tel que $A \cap V = \{x\}$, autrement dit si $x \in A$ et $\{x\}$ est ouvert dans A (pour la topologie induite).*
- **point d'accumulation** *de A si tout voisinage de x rencontre $A \setminus \{x\}$ (ce qui ne nécessite pas que x appartienne à A), autrement dit si x est adhérent à $A \setminus \{x\}$.*

Remarques.
- Il est évident qu'un point ne peut pas être à la fois point isolé et point d'accumulation de A, et que s'il est l'un ou l'autre alors il est adhérent à A. Et ce sont les seuls types possibles de points adhérent, car si un point adhérent x n'est pas isolé alors, pour tout voisinage V de x, $A \cap V \not\subset \{x\}$.
- On démontre facilement (comme dans la définition 2.6 d'espace séparé) qu'on peut remplacer partout "voisinage de x" par "ouvert contenant x" dans les définitions de point adhérent, point isolé et point d'accumulation.

Exemple Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $]0,1[\cup\{2\}$ a 2 come point isolé et $[0,1]$ comme ensemble de points d'accumulation. L'adhérence de $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ contient tous les $1/n$ comme points isolés et 0 comme point d'accumulation.

Cette dernière notion entretient un rapport étroit avec la suivante, mais attention à ne pas les confondre. La donnée d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient plus d'information que le simple ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs, ne serait-ce que le nombre de fois (fini ou infini) que chaque valeur est prise.

Définition 2.9 *Un point x est une* **valeur d'adhérence d'une suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si, pour tout voisinage V de x, il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in V$.*

Exemple : dans $\mathbb{R}$, 1 est un point isolé de la paire $\{-1,1\}$, mais est une valeur d'adhérence de la suite $(-1)^n$.

Proposition 2.10 *L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à $\cap_{N\in\mathbb{N}}\overline{\{u_n \mid n \geq N\}}$.*

Démonstration. x est une valeur d'adhérence de la suite u si et seulement si pour tout voisinage V de x, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est infini, c'est-à-dire s'il contient des entiers naturels arbitrairement grands, ce qui s'écrit :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \{u_n \mid n \geq N\} \cap V \neq \varnothing$$

ou encore (après interversion des deux $\forall$)

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad x \in \overline{\{u_n \mid n \geq N\}}. \quad \square$$

Exercice. (TD2) Montrer que

- dans un espace séparé, si a est un point d'accumulation de A, tout voisinage de a contient non seulement un point de A mais une infinité ;
- toute valeur d'adhérence d'une suite injective est point d'accumulation de l'ensemble de ses termes ;
- dans un espace séparé, tout point d'accumulation de l'ensemble des termes d'une suite est valeur d'adhérence de cette suite.

Exercice 2.11 (TD1) Montrer que si $A \subset B \subset E$, l'adhérence de A dans B (muni de la topologie induite) est égale à $\overline{A} \cap B$.

2.4 Fermés

Définition 2.12 *Les fermés d'un espace topologique E sont les complémentaires (dans E) de ses ouverts.*

On pourrait donc tout aussi bien définir un espace topologique par l'ensemble de ses fermés, satisfaisant aux 3 axiomes duaux de ceux pour les ouverts :

- E et $\varnothing$ sont des fermés de E,
- **toute** intersection de fermés de E est un fermé de E,
- toute réunion **finie** de fermés de E est un fermé de E.

Exercice 2.13 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de l'ordre, donner des exemples de parties qui sont à la fois ouvertes et fermées, d'ouverts non fermés, de fermés non ouverts, et de parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Exercice. (TD2)

1. Montrer que dans un espace séparé, tout singleton est fermé.
2. Montrer que la topologie cofinie sur un ensemble infini, bien que non séparée, vérifie aussi cette propriété.

Proposition 2.14 *L'adhérence d'une partie A est le plus petit fermé contenant A. En particulier, A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Démonstration. Ce plus petit fermé – pour l'inclusion – existe : c'est l'intersection de la famille des fermés contenant A (cette famille est bien non vide car E est un tel fermé). Il s'agit donc de montrer que x est adhérent à A si et seulement s'il appartient à tous ces fermés. Or x est adhérent à A si tout ouvert contenant x rencontre A c'est-à-dire, par passage au complémentaire, si tout fermé ne contenant pas x ne contient pas A tout entier, ou encore, par contraposée, si tout fermé contenant A contient x. □

Exercice 2.15 (TD2) Montrer que toute partie sans point d'accumulation est fermée, et sa topologie induite est discrète.

Exercice 2.16 (TD2) Sur un ensemble E, on veut définir une topologie à partir d'une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, que l'on note $A \mapsto \overline{A}$. Démontrer que les parties A telles que $\overline{A} = A$ vérifient les 3 axiomes des fermés si et seulement si cette application vérifie les *axiomes de Kuratowski* :

$$\forall X, Y \subset E \ : \quad X \subset \overline{X}, \quad \overline{\overline{X}} = \overline{X}, \quad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \quad \text{et} \quad \overline{\varnothing} = \varnothing.$$

2.5 Intérieur, frontière

Définition 2.17 *Pour une partie B d'un espace topologique, l'intérieur de B, noté $\mathring{B}$, est l'ensemble des points dont B est voisinage.*

Remarque. "Dualement" à l'inclusion $A \subset \overline{A}$, on a l'inclusion (tout aussi immédiate) $\mathring{B} \subset B$.

La notion d'intérieur est même complètement "duale" de celle d'adhérence, au sens suivant :

Proposition 2.18 *Si A et B sont complémentaires alors $\mathring{B}$ et $\overline{A}$ sont complémentaires.*

Démonstration. $x \notin \mathring{B} \Leftrightarrow B$ n'est pas un voisinage de $x \Leftrightarrow B$ ne contient aucun voisinage de $x \Leftrightarrow$ tout voisinage de x rencontre $A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$. □

On en déduit immédiatement la propriété duale de la proposition 2.14 et l'on retrouve le théorème 2.5 :

Corollaire 2.19 *L'intérieur d'une partie B est le plus grand ouvert inclus dans B. En particulier, B est un ouvert si et seulement si $\mathring{B} = B$.*

Enfin, la **frontière** d'une partie A, définie par

$$\mathrm{Fr}(A) := \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A},$$

est égale à la frontière du complémentaire de A.

2.6 Partie dense

Définition 2.20 *Une partie A de E est dite dense (dans E) si $\overline{A} = E$.*

Exercice 2.21 (TD2) Montrer (en utilisant l'exercice 2.11) que si A est dense dans B et B dense dans C alors A est dense dans C, C étant un espace topologique et B étant muni de la topologie induite (pour une généralisation, cf. exercice 2.38).

Corollaire 2.22 *Une partie est dense si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide, ou encore si et seulement si elle rencontre tout ouvert non vide.*

Démonstration. Notons B le complémentaire de A. D'après ce la proposition 2.18 et son corollaire, $\overline{A} = E$ si et seulement si $\mathring{B} = \varnothing$ et cela équivaut à : B ne contient aucun ouvert non vide, ou encore : tout ouvert non vide rencontre A. □

Corollaire 2.23 *Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie dense pour l'ordre (définition 1.5) est dense pour la topologie associée à cet ordre. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Dans E totalement ordonné, une partie A est dense pour l'ordre si et seulement si elle rencontre tout intervalle $]x, y[$ tel que $x < y$.
D'après la proposition précédente, A est dense pour la topologie de l'ordre si et seulement si elle rencontre tout intervalle $]x, y[$ *non vide* tel que $x < y$.
Il peut exister dans E des éléments $x < y$ tels que $]x, y[= \varnothing$ (exemple : $E = \mathbb{N}, x = 0, y = 1$). □
Exemples. Les parties $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est dense dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ (ce qui légitime a posteriori cette notation pour cet espace). Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ est dense pour toute topologie en particulier celle (discrète) de l'ordre, mais pas pour l'ordre car dans $\mathbb{N}$, $]n, n+1[= \varnothing$.
Attention à ne pas confondre la notion suivante avec celle d'espace séparé (cf. définition 2.6) :

Définition 2.24 *Un espace est dit* **séparable** *s'il possède une partie dense au plus dénombrable.*

Ainsi, $\mathbb{R}$ est séparable (donc $\overline{\mathbb{R}}$ aussi d'après l'exercice 2.21) puisque $\mathbb{Q}$ y est dense.

2.7 Base d'ouverts, base de voisinages

Définition 2.25 *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une* **base de la topologie** *$\mathcal{T}$ (ou une base d'ouverts de l'espace) si l'une des trois conditions équivalentes est vérifiée (donc les trois) :*
- *les ouverts de $\mathcal{T}$ sont exactement les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$;*
- *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ et tout ouvert de $\mathcal{T}$ est une* **réunion** *d'ouverts de $\mathcal{B}$;*
- *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ et pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout point $x \in U$, U contient un élément de $\mathcal{B}$ contenant x.*

La topologie $\mathcal{T}$ est dite **à base dénombrable** *si elle possède une base au plus dénombrable.*

(L'équivalence entre les deux premières propriétés et la troisième se démontre comme le théorème 2.5.)
Remarque. $\mathcal{T}$ elle-même est une base de $\mathcal{T}$, mais on cherche en général à décrire $\mathcal{T}$ par des bases plus économiques, i.e. "petites". Par exemple : les intervalles ouverts forment une base de la topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$, et les intervalles $]x, y[$ avec $x, y \in \mathbb{Q}$ forment une base dénombrable.

Définition 2.26 *Dans un espace topologique E, soient a un point et $\mathcal{F}$ un ensemble de parties. On dit que $\mathcal{F}$ est une* **base de voisinages** *de a (ou un* **système fondamental de voisinages** *de a) si les éléments de $\mathcal{F}$ sont des voisinages de a et tout voisinage de a* **contient** *un élément de $\mathcal{F}$, ou, ce qui est équivalent, si les voisinages de a sont exactement les parties de E contenant un élément de $\mathcal{F}$.*
E est dit **à bases dénombrables de voisinages** *si chacun de ses points admet (au moins) une base au plus dénombrable de voisinages.*

Pour éviter toute confusion avec la notion précédente de "à base dénombrable", on s'efforcera de préciser, pour cette dernière : "à base dénombrable d'ouverts".
Exemple. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la famille des intervalles de la forme $[a - 1/n, a + 1/n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base dénombrable de voisinages de a.

Cet exemple rappelle que les voisinages – en particulier les éléments d'une base de voisinages – ne sont pas forcément des ouverts. Il est cependant courant de les choisir tels, en utilisant la proposition suivante.

Proposition 2.27 *Pour tout espace topologique E, un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E est une base d'ouverts si et seulement si, pour tout point a de E, la famille des éléments de $\mathcal{B}$ qui contiennent a est une base de voisinages de a.*

Démonstration. Pour tout $a \in E$, notons $\mathcal{F}_a = \{W \in \mathcal{B} \mid a \in W\}$.
($\Rightarrow$) Supposons que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts et fixons $a \in E$. Pour toute partie V de E, V est un voisinage de a si et seulement s'il contient un ouvert contenant a, c'est à dire une réunion, contenant a, d'éléments de $\mathcal{B}$, autrement dit si V contient un $W \in \mathcal{B}$ contenant a. Les voisinages de a sont donc exactement les parties de E contenant un $W \in \mathcal{F}_a$, ce qui prouve que $\mathcal{F}_a$ est une base de voisinages de a.
($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $a \in E$, $\mathcal{F}_a$ est une base de voisinages de a. Pour toute partie U de E, U est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire : $\forall a \in U, \exists W \in \mathcal{F}_a, W \subset U$, ou encore : $\forall a \in U$, U contient un $W \in \mathcal{B}$ qui contient a, autrement dit – comme dans la preuve du théorème 2.5 – si U est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Les ouverts sont donc exactement les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts. $\square$

Proposition 2.28 *Tout espace à base dénombrable (d'ouverts) est séparable et à bases dénombrables de voisinages.*

Démonstration. Il est à bases dénombrables de voisinages d'après la proposition précédente. Pour montrer qu'il est aussi séparable, il suffit, étant donnée une base au plus dénombrable d'ouverts non vides, de choisir un point dans chacun : on obtient une partie au plus dénombrable qui rencontre tout ouvert non vide, donc elle est dense (corollaire 2.22). $\square$
L'exercice suivant montre que les réciproques sont fausses (il existe même des espaces qui sont à la fois séparés, séparables et à bases dénombrables de voisinages mais qui ne sont pas à base dénombrable d'ouverts, comme la droite de Sorgenfrey (problème 2 du partiel de novembre 2013, §11.12) ou le plan de Moore).
Exercice. (TD3) Soit X un ensemble infini. Montrer que
- pour la topologie discrète, X est à bases dénombrables de voisinages, mais il n'est à base dénombrable (ou même simplement séparable) que s'il est dénombrable ;
- pour la topologie cofinie, X est séparable, mais il n'est à base dénombrable (ou même simplement à bases dénombrables de voisinages) que s'il est dénombrable.

La propriété d'être à base dénombrable ou à bases dénombrables de voisinages passe aux sous-espaces, mais pas la séparabilité.

La notion de bases de voisinages permet de définir une version locale pour toute propriété topologique "truc" : un espace est "localement truc" si tout point admet une base de voisinages qui sont tous "truc" pour la topologie induite. On verra plus loin par exemple les notions d'espace localement compact ou localement connexe, mais on peut déjà effleurer celle qui est à la base de la définition des variétés topologiques de dimension n : un espace est dit localement euclidien de dimension 1 si tout point a une base de voisinages homéomorphes (identiques du point de vue topologique) à $\mathbb{R}$. Par exemple le cercle usuel peut être naturellement muni d'une telle topologie.

2.8 Produit de deux espaces topologiques

Proposition 2.29 *Soient X un ensemble, $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X et $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$. $\mathcal{T}$ est une topologie sur X si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées : $X \in \mathcal{T}$ et pour tous $U, V \in \mathcal{B}$, $U \cap V \in \mathcal{T}$. Cette topologie est alors l'unique topologie sur X dont $\mathcal{B}$ est une base.*

Remarque. Pour que la seconde condition soit réalisée, il *suffit* que $\mathcal{B}$ soit stable par intersections finies (comme l'ensemble des intervalles ouverts qui a servi de base pour définir la topologie de l'ordre).
Démonstration. Le seul point à vérifier est le "si". La seconde condition assure que $\mathcal{T}$ est stable par intersections finies, et le reste des axiomes d'une topologie est satisfait par construction. □

Définition 2.30 *Si X et Y sont deux espaces topologiques, la topologie produit sur l'ensemble $X \times Y$ est celle dont une base d'ouverts est constituée des "ouverts élémentaires" : les parties de la forme $U \times V$ avec U ouvert de X et V ouvert de Y.*

Il est immédiat que ces $U \times V$ forment bien la base d'une (unique) topologie (cf. proposition 2.29) et qu'on peut se contenter des U d'une base d'ouverts de X et des V d'une base d'ouverts de Y. Par exemple : la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$ a pour base d'ouverts les "rectangles ouverts".

Exercice 2.31 (Devoir surveillé d'octobre 2014, §11.9) Montrer que l'adhérence dans $X \times Y$ d'une partie produit $A \times B$ est égale au produit $\overline{A} \times \overline{B}$ des adhérences de ces parties. En particulier si A est dense dans X et B dense dans Y alors $A \times B$ est dense dans $X \times Y$.

Exercice. (TD3) Soient X et Y deux espaces topologiques. Montrer que

- si X et Y sont séparés alors $X \times Y$ aussi ;
- pour $A \subset X$ et $B \subset Y$, sur $A \times B$, le produit des topologies induites coïncide avec la topologie induite par celle du produit $X \times Y$.

Proposition 2.32 *Un espace Y est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\}$ est un fermé de l'espace produit $Y \times Y$.*

Démonstration. $(Y \times Y) \setminus \Delta_Y$ est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points, i.e. si pour tous $x, y \in Y$ distincts, il existe deux ouverts $U \ni x, V \ni Y$ tels que $U \times V$ soit disjoint de Δ_Y c'est-à-dire tels que $U \cap V = \varnothing$. □

2.9 Limite, continuité

Définition 2.33 *Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X, $f : A \to Y$, $a \in \overline{A}$ et $y \in Y$. On dit que f a pour limite y au point a si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que $f(W \cap A) \subset V$.*

Remarques.

- Cette définition inclut celle de limite d'une suite, en prenant $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ muni de la topologie de l'ordre (ou de la topologie cofinie, pour laquelle les voisinages de $+\infty$ sont les mêmes) : une suite a pour limite ℓ si et seulement si tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- (TD3) Dans la définition, on peut remplacer "voisinage d'un point" (ℓ ou a) par "élément d'une base (fixée) de voisinages de ce point" (par exemple : "ouvert contenant ce point", ou seulement : "élément, contenant ce point, d'une base d'ouverts"). Pour une fonction réelle de la variable réelle ou pour une suite réelle, on retrouve ainsi les définitions usuelles des limites (y compris infinies, en prenant $Y = \overline{\mathbb{R}}$).

Proposition 2.34 *Sous les hypothèses de la définition,*

1. *ℓ est nécessairement adhérent à $f(A)$;*
2. *si Y est séparé et si une telle limite existe alors elle est unique.*

Remarques.

- Le premier point, appliqué à $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$ (cf. remarque ci-dessus) montre que toute limite d'une suite est adhérente à l'ensemble des valeurs de la suite, donc à toute partie qui les contient. On verra (proposition 2.43) que réciproquement, mais *sous une hypothèse supplémentaire*, tous les points adhérents à une partie s'obtiennent comme limites de suites à valeurs dans cette partie.
- Le second point légitime (sous ses hypothèses) la notation $\lim_a f = \ell$.

Démonstration. Pour tout voisinage W de a, $f(W \cap A)$ est inclus dans $f(A)$ et (puisque $a \in \overline{A}$) non vide, donc :

1. pour tout voisinage V de ℓ, $V \cap f(A)$ est non vide ;
2. pour tous voisinages V_1 et V_2 de deux limites, $V_1 \cap V_2$ est non vide car il contient un $f(W \cap A)$ avec $W = W_1 \cap W_2$ (intersection de deux) voisinage(s) de a. □

Définition 2.35 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $a \in X$. On dit que f est*

- *continue au point a si f a pour limite $f(a)$ au point a,*
- *continue (sur X) si elle est continue en tout point de X,*
- *un homéomorphisme lorsqu'elle est bijective et que f et f^{-1} sont continues.*

Proposition 2.36 *f est continue au point a si et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a.*

Remarques. Une application f définie sur X est dite continue sur une partie A si sa restriction $f_{|A}$ à A (muni de la topologie induite) est continue. Il suffit pour cela que f soit continue en tout point de A, mais ce n'est pas nécessaire (penser à l'indicatrice de $\mathbb{Q}$). Cependant, si A est un voisinage de a dans X et si $f_{|A}$ est continue en a alors f est continue en a.
La notion de continuité au point a vient d'être définie à partir de celle de limite au point a. On peut faire l'inverse : si $a \in \overline{A} \setminus A$, une application $f : A \to Y$ admet $\ell \in Y$ comme limite en a si et seulement si le prolongement g de f à $A \cup \{a\}$ défini en posant $g(a) = \ell$ est continu en a.

Proposition 2.37 *Pour toute application $f : X \to Y$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'application f est continue ;*
2. *l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X ;*
3. *l'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X ;*
4. *pour toute partie A de X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
5. *pour toute partie B de Y, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Exercice. (TD1) Dans $\mathbb{R}^2$ (muni de sa topologie usuelle, produit de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ par elle-même), les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ?

$A = \{(1/n, y) \mid n \in \mathbb{N}^*, y \in [0, 1]\}$,
$B = \{(x, \arctan x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2/3 + y^2/5 < 2 \text{ et } y < 3 - x^4\}$.

Exercice. Montrer que :

- l'application identité $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$;

– (TD3) dans le critère 2, on peut remplacer "ouvert de Y" par "élément d'une base (fixée) d'ouverts de Y" ;
– l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 1/x$ si $x \geq 1$ est continue mais pour $A = \mathbb{R}$ et $B =]0,1[$, les inclusions réciproques de 4 et 5 sont fausses.

Démonstration. ($2 \Leftrightarrow 3$) par passage aux complémentaires. Dans la suite, on utilisera en permanence l'équivalence

$$f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B).$$

($1 \Leftrightarrow 2$) L'application f est continue si et seulement si, pour tout $a \in X$ et tout ouvert O de Y contenant $f(a)$, $f^{-1}(O)$ est un voisinage de a, autrement dit si, pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire est ouvert.
($3 \Rightarrow 5$) Si l'image réciproque du fermé $F = \overline{B}$ est fermée alors elle contient non seulement $f^{-1}(B)$ mais son adhérence.
($5 \Rightarrow 4$) Posons $B = f(A)$. Alors, $A \subset f^{-1}(B)$ donc si $f^{-1}(\overline{B})$ contient l'adhérence de $f^{-1}(B)$, il contient celle de A, d'où $f(\overline{A}) \subset \overline{B}$.
($4 \Rightarrow 3$) Soit F un fermé de Y. Posons $A = f^{-1}(F)$. Comme F est un fermé contenant $f(A)$, il contient aussi son adhérence donc si celle-ci contient $f(\overline{A})$ alors $\overline{A} \subset f^{-1}(F)$, c'est-à-dire que l'ensemble $A = f^{-1}(F)$ est fermé. □

Exercice 2.38 (TD3) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ continues, montrer que si f et g sont d'image dense alors $g \circ f$ aussi.

La démonstration du corollaire et des deux propositions qui suivent est un exercice facile mais *recommandé*.

Corollaire 2.39
– *La topologie induite sur $X \subset E$ est la moins fine rendant continue l'injection canonique de X dans E.*
– *Toute restriction à X d'une application continue (sur E) est continue (sur X muni de la topologie induite).*
– *Une application $f : E \to F$ d'image incluse dans $Y \subset F$ est continue si et seulement si sa corestriction de E dans Y (muni de la topologie induite) l'est.*

Proposition 2.40
– *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, A une partie de X, $a \in \overline{A}$, $f : A \to Y$ et $g : Y \to Z$. Si f a pour limite ℓ au point a et si g est continue au point ℓ, alors $g \circ f$ a pour limite $g(\ell)$ au point a.*
– *Toute composée d'applications continues est continue.*

Remarque. Un cas particulier du premier point est : si $u_n \to \ell$ et si g est continue au point ℓ, alors $g(u_n) \to g(\ell)$.

Proposition 2.41 *Pour deux espaces X et Y, soient $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ les deux projections canoniques.*
– *La topologie produit sur l'ensemble $X \times Y$ est la moins fine rendant continues p_X et p_Y.*
– *Une application f à valeurs dans cet espace produit $X \times Y$ est continue si et seulement si ses deux composantes $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ le sont.*

Tout ceci se généralise à un produit fini d'espaces. Il existe une définition et une caractérisation analogues d'un produit infini, mais les "ouverts élémentaires" ne sont alors *pas tous* les produits d'ouverts.
Exercices.

- Pour tout espace topologique $\{y\}$ réduit à un singleton, expliciter un homéomorphisme entre X et $X \times \{y\}$.
- Attention : si une application *définie sur un produit* est continue alors ses applications partielles (quand on fixe l'une des deux variables) le sont, mais la réciproque est fausse : considérer l'application $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$, prolongée par la valeur 0 au point $(0, 0)$.

Proposition 2.42 *Soient Y un espace séparé et X un espace quelconque.*

1. *Étant données deux applications continues de X dans Y, l'ensemble des points où elles coïncident est un fermé de X.*
2. *Si $f : X \to Y$ est continue, son graphe $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ est un fermé de l'espace produit $X \times Y$.*

Démonstration.

1. Notons F et G ces deux applications. L'ensemble où elle coïncident est l'image réciproque de la diagonale Δ_Y (fermée d'après la proposition 2.32) par l'application qui à tout $x \in X$ associe le couple $(F(x), G(x)) \in Y \times Y$. D'après la proposition ci-dessus, cette application est continue.
2. Ce graphe est l'ensemble des éléments de $X \times Y$ où $f \circ p_X$ coïncide avec p_Y. $\square$

Exercice. (TD3) Montrer par un contre-exemple de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que la réciproque du second point est fausse.

La proposition suivante s'applique en particulier dans les espaces métriques du prochain chapitre.

Proposition 2.43 *Dans un espace Y, soit y un point possédant une base au plus dénombrable de voisinages.*

1. *pour toute suite u dans Y, y est une valeur d'adhérence de u (si et) seulement s'il est limite d'une sous-suite de u ;*
2. *pour toute partie B de Y, y est adhérent à B (si et) seulement s'il est limite d'une suite d'éléments de B ;*
3. *pour toute application $g : B \to Z$ définie sur une partie B de Y à laquelle y est adhérent, un point $\ell \in Z$ est limite de g en y si (et seulement si) ℓ est une* **limite séquentielle** *de g en y, c'est-à-dire si pour toute suite $u = (u_n)$ dans B de limite y, la suite $g \circ u = (g(u_n))$ a pour limite ℓ.*

Démonstration. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de voisinages de y, que l'on peut supposer décroissante (quitte à remplacer chaque V_n par son intersection avec les V_m précédents). Le principe est que toute suite u telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in V_n$ converge alors vers y.

1. Si y est une valeur d'adhérence d'une suite u, comme chaque V_n contient u_k pour une infinité d'indices k, on peut définir par récurrence une suite d'entiers k_n en choisissant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel k_n strictement supérieur aux k_m précédents et tel que $u_{k_n} \in V_n$.
2. Si y est adhérent à une partie B, comme chaque V_n rencontre B, on peut choisir $u_n \in V_n \cap B$.
3. Raisonnons par contraposée. Si ℓ n'est pas limite de g en y, il existe un voisinage V de ℓ dont l'image réciproque ne contient aucun $V_n \cap B$. En choisissant dans chaque $V_n \cap B$ un u_n tel que $g(u_n) \notin V$, on construit une suite u de limite y dont l'image ne converge pas vers ℓ. $\square$

Exercice. Déduire de cette proposition purement locale quelques énoncés globaux et un critère (local ou global) de continuité.

Exercice. (TD3) Soit un ensemble non dénombrable, muni de la topologie codédombrable : les ouverts sont $\varnothing$ et les parties codénombrables, c'est-à-dire de complémentaire au plus dénombrable. Montrer que

- ceci définit bien une topologie (est-elle séparée ?) ;
- les seules suites convergentes sont les suites constantes ;
- toute partie non dénombrable est dense ;
- cet espace n'est pas à bases dénombrables de voisinages ;
- aucun point de cet espace n'est à bases dénombrables de voisinages.

Chapitre 3

Espace métrique

3.1 Distance et norme

Définition 3.1 *Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que (pour tous points x, y et z de E)*

- *symétrie : $d(x,y) = d(y,x)$*
- *séparation : $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*
- *inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*

Un espace métrique est un tel couple (E,d), noté simplement E quand d est implicite.

Exemples.

- La distance discrète sur un ensemble quelconque E est définie par $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) = 1$ si $y \neq x$.
- La distance usuelle sur $\mathbb{R}$ est définie par $d(x,y) = |x - y|$.
- Si X est un ensemble et (E,d) un espace métrique, l'ensemble E^X des applications de X dans E peut être muni de la *distance de la convergence uniforme* :

$$d_\infty(f,g) = \min(1, e_\infty(f,g)), \quad \text{où} \quad e_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \in [0, +\infty].$$

Définition 3.2 *Une norme sur un espace vectoriel réel E est une application $\| \ \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que (pour tous vecteurs x et y et tout réel λ)*

- *séparation : $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$*
- *homogénéité : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$*
- *sous-additivité ou inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

On définit alors sur E une distance en posant $d(x,y) = \|x - y\|$.
Exemples. La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou hermitienne sur $\mathbb{C}^n$) et plus généralement les "normes ℓ^p", définies par

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p} \text{ si } p \in [1, +\infty[,$$
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Dans un espace métrique, on définit les boules ouvertes, les boules fermées et les sphères par :

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}, \ B'(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}, \ S(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) = r\}.$$

Exercice. Pour que $B(\omega, r) \subset B(\Omega, R)$, montrer qu'il suffit que $r \leq R - d(\Omega, \omega)$. En déduire qu'il suffit que $2r \leq R - d(\Omega, a)$ pour un certain $a \in B(\omega, r)$.

3.2 Topologie d'un espace métrique

Définition 3.3 *La topologie canonique d'un espace métrique E est celle dont une base d'ouverts est constituée des boules ouvertes.*
Un espace topologique est dit métrisable si sa topologie peut être ainsi déduite d'une distance.

On vérifie que ces boules forment bien une base (cf. proposition 2.29).
Exemples. La topologie canonique sur $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est la topologie de l'ordre. Celle sur un ensemble muni de la distance discrète est la topologie discrète.
Tout espace métrisable est *évidemment* **séparé et à bases dénombrables de voisinages**.
Exercice. Montrer que (contrairement à la topologie de l'ordre) la topologie de la distance se comporte bien par rapport à la topologie induite, c'est-à-dire que si A est une partie d'un espace métrique E, les deux topologies naturelles sur A sont égales (celle induite par la topologie de E et celle de la distance sur A restriction de celle sur E). Indication : montrer que pour tout $a \in A$, les $B(a, r) \cap A$ $(r > 0)$ forment une base de voisinages de a pour ces deux topologies.

Lemme 3.4 *Soient E un espace métrique et a un point de E.*

1. *Toute suite de boules voisinages a et de rayons tendant vers 0 constitue une base de voisinages de a.*
2. *Pour qu'un ensemble de boules ouvertes soit une base d'ouverts, il suffit que tout point de E appartienne à des boules de cet ensemble de rayons arbitrairement petits.*

Démonstration. Le premier point se déduit de l'exercice final du §3.1.
Le second se déduit du premier et de la proposition 2.27. □

Proposition 3.5 *Un espace métrisable est à base dénombrable d'ouverts (si et seulement) s'il est séparable.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense, alors la famille dénombrable des boules $B(x_n, 1/m)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ forme une base d'ouverts, d'après le lemme. (Réciproquement, tout espace – métrisable ou pas – à base dénombrable d'ouverts est séparable, cf. proposition 2.28.) □
Exercice. (TD3) Soit, pour tout entier naturel n, une suite réelle $x(n) = (x(n)_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe une suite bornée $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, |y_k - x(k)_k| \geq 1$. En déduire que l'espace ℓ^∞ des suites bornées n'est pas séparable.

3.3 Propriétés de la distance

Définition 3.6 *Dans un espace métrique (E, d),*
- *une partie est dite bornée si elle est incluse dans une boule ;*
- *le diamètre d'une partie non vide A est défini par :*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y) \in [0, +\infty].$$

Exercices.
- L'ensemble vide est-il borné ?
- Quelles sont les parties (non vides) de diamètre nul ?
- Montrer que dans $\mathbb{R}$, les parties bornées pour la distance usuelle sont simplement les parties bornées au sens de l'ordre.
- Montrer que $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

Proposition 3.7 *Pour une partie non vide A de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

– *la partie est bornée ;*
– *son diamètre est fini ;*
– *pour tout $x \in E$, A est inclus dans une boule de centre x.*

Une application à valeurs dans un espace métrique est dite bornée si son image est une partie bornée.
Exercice. En utilisant la proposition 2.43, montrer que :
– pour la topologie de la convergence uniforme sur E^X, le sous-ensemble $B(X,E)$ des fonctions bornées est fermé ;
– si l'ensemble X est muni d'une topologie, le sous-ensemble $C(X,E)$ des fonctions continues est également fermé dans $B(X,E)$.

Nous allons déduire de l'inégalité triangulaire (jointe à la symétrie) que

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y),$$

et même une inégalité plus générale :

Définition 3.8 *Une application $f : E \to F$ entre deux espaces métriques est dite k-lipschitzienne, pour un certain réel $k \geq 0$, si*

$$\forall x, y \in E, \quad d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x,y).$$

S'il existe de tels k alors le plus petit d'entre eux existe et est appelé la constante de Lipschitz de f.

On verra plus loin qu'une telle application est continue. Exemple : toute application isométrique (c'est-à-dire vérifiant $d_F(f(x), f(y)) = d_E(x,y)$) est 1-lipschitzienne, donc toute isométrie (c'est-à-dire toute bijection – ou surjection – isométrique) est un homéomorphisme.

Proposition 3.9 *L'application distance d'un point à une partie A non vide, définie de E dans $\mathbb{R}$ par*

$$x \mapsto d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a),$$

est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

Démonstration. Pour x, y fixés, soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ définies par$f(a) = d(x,a)$ et $g(a) = d(x,y) + d(y,a)$. De $f \leq g$ on déduit $\inf f \leq \inf g$ (cf. TD2), c'est-à-dire $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$. Même chose en échangeant x et y, autrement dit : $d(x,y)$ majore à la fois la différence $d(x,A) - d(y,A)$ et son opposée. Il majore donc la valeur absolue. □

Exercice. Pour A, B non vides, on pose $d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b)$.
Montrer que $d(A,B) = \inf_{b \in B} d(b,A)$. Montrer que $d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A,B)$. Trouver deux fermés disjoints A et B dans $\mathbb{R}^2$, puis dans $\mathbb{R}$, tels que $d(A,B) = 0$.

Attention : toute "boule ouverte" est ouverte (par définition), toute "boule fermée" $B'(a,r)$ est fermée (comme image réciproque du fermé $[0,r]$ par l'application $x \mapsto d(x,a)$ qui est 1-lipschitzienne donc continue), mais quand la distance ne vient pas d'une norme, les inclusions suivantes peuvent être strictes (considérer par exemple la distance discrète) :

$$\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r), \ \overbrace{B'(a,r)}^{\circ} \supset B(a,r)$$

(et donc les frontières de $B(a,r)$ et de $B'(a,r)$ sont incluses dans la sphère $S(a,r)$).
Exercice. (TD3) Démontrer que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $B(a,r)$ et de $B'(a,r)$ sont ce à quoi l'on s'attend.

Proposition 3.10 *L'adhérence d'une partie est l'ensemble des points à distance nulle de cette partie :*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0.$$

Démonstration. Chacune des deux assertions équivaut à l'existence d'une suite (a_n) à valeurs dans A telle que $d(x, a_n) \to 0$. □

Exercice. Montrer que pour tout point x et toute partie A, $d(x\overline{A}) = d(x,A)$.

3.4 Continuité uniforme

Deux distances sur X qui définissent la même topologie sont dites topologiquement équivalentes. Mais pour les espaces métriques, il existe une notion plus fine de continuité et donc d'équivalence (on verra plus loin que pour des distances associées à des normes, les deux notions coïncident, et que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes) :

Définition 3.11 *Une application f d'un espace métrique (E, d_E) dans un espace métrique (F, d_F) est dite uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \quad d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Deux distances d et d' sur un même espace X sont dites uniformément équivalentes si l'application identité de (X, d) dans (X, d') et sa réciproque sont uniformément continues.
On dit alors que d et d' définissent sur X la même structure uniforme.

Exercices.

- Pour toute application entre espaces métriques,
  lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue ;
- pour toutes distances d et d' sur un même ensemble,
  Lipschitz-équivalentes $\Rightarrow$ uniformément équivalentes $\Rightarrow$ topologiquement équivalentes,
  où Lipschitz-équivalentes signifie $\exists a, b > 0, ad \leq d' \leq bd$;
- les réciproques sont fausses (on verra bientôt une notion strictement intermédiaire entre l'équivalence topologique et l'équivalence uniforme : celle d'avoir mêmes suites de Cauchy).
- sur $\mathbb{R}^n$, les distances associées aux normes $\| \ \|_p$ sont toutes Lipschitz-équivalentes à la norme $\| \ \|_\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ (pour information : l'inégalité de Hölder permet même de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application décroissante $p \mapsto \|x\|_p$ est continue sur $[1, +\infty]$) ;
- (TD3) pour toute distance d, $\min(1, d)$ et $\frac{d}{1+d}$ sont des distances uniformément équivalentes à d, et bornées (donc non Lipschitz-équivalentes à d si d est non bornée). En particulier sur $B(X, E)$, la distance uniforme d_∞ (cf. §3.1) est uniformément équivalente à e_∞, qui est pour cet espace une distance plus commode.

Proposition 3.12 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. L'application d définie par*

$$d((x, y), (x', y')) = \max(d_X(x, x'), d_Y(y, y'))$$

est une distance sur l'ensemble produit $X \times Y$ et sa topologie associée n'est autre que le produit des topologies sur X et Y associées à d_X et d_Y.

Démonstration. La vérification que d est une distance est immédiate. L'égalité entre les deux topologies résulte de la remarque : $B_d((x, y), r) = B_{d_X}(x, r) \times B_{d_Y}(y, r)$. En effet, on en déduit d'abord que toute d-boule ouverte – donc aussi toute réunion de d-boules ouvertes – est un ouvert de $X \times Y$. Montrons que réciproquement, tout ouvert O de $X \times Y$ est un ouvert pour la topologie associée à d, c'est-à-dire est un d-voisinage de tous ses éléments ; pour tout $(x, y) \in O$, il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que $(x, y) \in U \times V$ et $U \times V \subset O$, donc il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $B_{d_X}(x, r_1) \times B_{d_Y}(y, r_2) \subset O$ d'où, en posant $r = \min(r_1, r_2)$: $B_d((x, y), r) \subset O$. $\square$

Remarque. Par l'équivalence ci-dessus entre les diverses normes $\| \ \|_p$ sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in [1, +\infty]$, on obtient des distances d_p sur $X \times Y$ uniformément équivalentes à la distance d de la proposition en posant

$$d_p((x, y), (x', y')) = \| (d_X(x, x'), d_Y(y, y')) \|_p.$$

Plus généralement, on démontrerait – si l'on avait défini les produits infinis d'espaces topologiques – qu'un produit *dénombrable* d'espaces métrisables est métrisable, d'une façon “suffisamment canonique”.

Proposition 3.13 *Soient* (X, d_X), (Y, d_Y) *et* (Z, d_Z) *trois espaces métriques et* $f : X \times Y \to Z$ *une application* k_X*-lipschitzienne par rapport à la première variable et* k_Y*-lipschitzienne par rapport à la seconde. Alors, pour la distance* d *ci-dessus sur* $X \times Y$, f *est* $(k_X + k_Y)$*-lipschitzienne.*

Démonstration. $d_Z(f(x,y), f(x',y')) \leq d_Z(f(x,y), f(x',y)) + d_Z(f(x',y), f(x',y'))$
$\leq k_X d_X(x,x') + k_Y d_Y(y,y') \leq (k_X + k_Y) d((x,y),(x',y'))$. □

Corollaire 3.14 *Pour tout espace métrique* (X, d_X), *l'application* d_X *est 2-lipschitzienne, de* $X \times X$ *(muni de la distance* d *ci-dessus) dans* $\mathbb{R}$ *(muni de la distance usuelle).*

Exercice. Soient $f : X \to Y$ une application continue. On suppose qu'il existe dans X une partie dense A telle que la restriction de f à A soit isométrique. Montrer que f est isométrique. Même question en remplaçant "isométrique" par "uniformément continue".

3.5 Complétude

3.6 Suites de Cauchy, espaces complets

Définition 3.15 *Une suite* (u_n) *dans un espace métrique* (E, d) *est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N, \quad d(u_p, u_q) \leq \varepsilon,$$

autrement dit si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m \geq n} d(u_m, u_n) = 0.$$

Proposition 3.16

1. *toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même de Cauchy ;*
2. *toute suite de Cauchy est bornée ;*
3. *une suite est convergente si (et seulement si) elle est de Cauchy et possède une sous-suite convergente ;*
4. *l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.*

Démonstration. Le "autrement dit" de la définition vient de

$$\forall p, q \geq N, d(u_p, u_q) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall m \geq n \geq N, d(u_m, u_n) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall n \geq N, \sup_{m \geq n} d(u_m, u_n) \leq \varepsilon.$$

Soit u une suite de Cauchy.

1. Immédiat en utilisant que si $(u_{n_k})_k$ est une sous-suite de $(u_n)_n$ alors $n_k \geq k$.
2. Il existe N tel que $\forall m \geq N$, $d(u_m, u_N) \leq 1$ donc la suite est bornée ("à partir du rang N" donc à partir du rang 0, quitte à remplacer 1 par son max avec N réels).
3. Si u possède une valeur d'adhérence ℓ alors u converge vers ℓ car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall p, q \geq N, d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$ et $\exists q \geq N$ tel que $d(u_q, \ell) < \varepsilon$ donc $\forall p \geq N, d(u_p, \ell) < 2\varepsilon$.
4. Immédiat. □

Définition 3.17 *Un espace métrique* E *est dit complet si tout suite de Cauchy converge dans* E. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet (pour la distance associée à sa norme).*

Exemples.

– Pour la distance usuelle, $\mathbb{Q}$ n'est *évidemment* pas complet mais $\mathbb{R}$ l'est, puisque toute suite réelle bornée possède des sous-suites qui convergent dans $\mathbb{R}$ (cf. §1.2).
– L'espace vectoriel ℓ^p (cf. cours d'intégration : constitué de certaines suites et muni d'une norme généralisant la norme ℓ^p sur $\mathbb{R}^n$) est un espace de Banach.
– Dans ℓ^p, le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang n'est pas complet.

Exercice. (TD3) Sur $\mathbb{R}$, donner une distance topologiquement équivalente à la distance usuelle mais pour laquelle $\mathbb{R}$ n'est pas complet (donc a plus de suites de Cauchy) et une distance qui a mêmes suites de Cauchy que la distance usuelle mais ne lui est pas uniformément équivalente (penser à $|x^3 - y^3|$).

3.7 Propriétés générales

Proposition 3.18 *Si E est un espace métrique complet alors, pour tout ensemble X, l'espace métrique E^X aussi (muni de la distance de la convergence uniforme).*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E^X. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe N tel que $\forall p,q \geq N, d_\infty(f_p,f_q) \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $\forall x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon$. On en déduit que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge vers un certain $f(x) \in E$, et (par passage à la limite quand $q \to \infty$ puis au sup sur $x \in X$) $\forall\varepsilon \in]0,1[, \exists N, \forall p \geq N, d_\infty(f_p(x), f(x)) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $f_n \to f$. □

Proposition 3.19

1. *Toute partie complète d'un espace métrique E est fermée dans E.*
2. *Tout fermé d'un espace métrique complet est complet.*

(En particulier lorsque E est un espace vectoriel normé : tout sous-espace qui est de Banach est fermé, et réciproquement si E est de Banach.)
Démonstration.

1. Soit A une partie complète de E. D'après la proposition 2.43, il suffit de montrer que pour toute suite a dans A qui converge dans E, la limite ℓ est dans A. Or a est une suite de Cauchy dans A, donc converge vers un certain $\ell' \in A$, d'où $\ell = \ell' \in A$.
2. Soient A fermé dans E complet et a une suite de Cauchy dans A. Alors a est une suite de Cauchy dans E donc converge vers un certain $\ell \in E$. Comme A est fermé, $\ell \in A$ donc a converge dans A. □

Par exemple, pour la distance de la convergence uniforme sur E^X, si E est complet alors $B(X,E)$ aussi. Si de plus X est un espace topologique alors $C(X,E)$ est complet aussi (et l'intersection des deux aussi, mais on verra que $C(X,E)$ est en fait inclus dans $B(X,E)$ dès que X est compact, en particulier si X est un segment réel $[a,b]$).

Proposition 3.20 *Un produit $X \times Y$ d'espaces métriques non vides est complet si et seulement si X et Y le sont.*

Démonstration. Exercice (TD3). □
En particulier, $\mathbb{R}^n$ est complet pour toute norme ℓ^p.

Théorème 3.21 Théorème des fermés emboîtés. *Un espace métrique E est complet si et seulement si, dans E, pour toute suite décroissante de fermés non vides F_n dont le diamètre tend vers zéro, l'intersection des F_n est non vide (donc est un singleton).*

Démonstration. Supposons que E est complet et soit $(F_n)_n$ comme dans l'énoncé. Pour tout n, choisissons un $x_n \in F_n$. Alors la suite x est de Cauchy donc convergente, et sa limite ℓ appartient à tous les F_n donc à leur intersection F. Comme le diamètre de F est majoré par ceux des F_n, il est nul donc $F = \{\ell\}$.
Réciproquement, supposons que E vérifie la propriété de l'énoncé et soit x une suite de Cauchy, c'est-à-dire telle que le diamètre des fermés emboîtés $F_n = \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$ tend vers 0. Alors l'ensemble $F = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ des valeurs d'adhérence (cf. proposition 2.10) de la suite x est non vide donc (puisqu'elle est de Cauchy) elle converge. □

3.8 Prolongement d'une application et complété d'un espace

Pour qu'une application f à valeurs dans un espace métrique F, continue sur une partie dense d'un espace métrique E, se prolonge en une application continue g de E dans F (un tel prolongement étant alors unique d'après la proposition 2.42), on a besoin de deux hypothèses : que F soit complet, pour qu'il contienne "assez de points", candidats à être des $g(x)$ (par exemple $f = \mathrm{id} : \mathbb{Q} \to F = \mathbb{Q}$ ne s'étend pas en une application continue $g : E = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \to F$), et que f soit "mieux que continue", pour ne pas avoir de "conflits entre les candidats" (par exemple $f = \mathbf{1}_{]0,+\infty[} : \mathbb{R}^* \to F = \mathbb{R}$ est continue, mais ne s'étend pas en une application continue $g : E = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}^*} \to F$). L'hypothèse classique sur f est la continuité uniforme (sur toute partie bornée : cela suffit) mais il en existe une suffisante et plus souple : la continuité de Cauchy.

Définition 3.22 *Une application $f : E \to F$ entre deux espaces métriques est dite Cauchy-continue si pour toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans E, la suite $(f(x_n))_n$ dans F est de Cauchy.*

Proposition 3.23 *Si f est uniformément continue sur toute partie bornée alors elle est Cauchy-continue et si f est Cauchy-continue alors elle est continue.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ de Cauchy dans E. L'ensemble B de ses termes est donc borné et si f est uniformément continue sur B alors $(f(x_n))_n$ est de Cauchy.
Supposons maintenant f Cauchy-continue et montrons qu'elle est continue en tout point x. D'après la proposition 2.43 – applicable ici car tout espace métrique est à bases dénombrables de voisinages – il suffit de vérifier que pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$. On conclut en remarquant que "$x_n \to x$" équivaut à "la suite $(x_0, x, x_1, x, \ldots)$ est de Cauchy" (et de même pour les images). □
Exemples. Les réciproques sont fausses : on a déjà vu l'exemple de la fonction $\mathbf{1}_{]0,+\infty[} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, qui est continue mais pas Cauchy-continue (l'image de la suite $(-1)^n/n$ n'est pas de Cauchy) ; la fonction $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ non plus (l'image de la suite $\pi/2 - 1/n$ n'est pas de Cauchy). L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est Cauchy-continue mais pas uniformément continue. Pour la distance usuelle d, elle est uniformément continue sur toute partie bornée, mais il suffit de remplacer d par une distance bornée uniformément équivalente pour qu'elle ne le soit plus.

Théorème 3.24 Théorème de prolongement. *Si A est une partie dense d'un espace métrique E, toute application Cauchy-continue f de A dans un espace métrique complet F se prolonge (de façon unique) en une application continue $g : E \to F$.*

Démonstration. Tout point $x \in E$ est limite d'une suite $(a_n)_n$ dans A. La suite $(f(a_n))_n$ est alors de Cauchy dans F complet, donc convergente, et sa limite ne dépend que de x. En effet, si $(b_n)_n$ est une autre suite dans A qui converge vers x, alors la suite $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ est de Cauchy donc son image par f converge, si bien que $(f(b_n))_n$ a même limite que $(f(a_n))_n$. On peut donc définir $g : E \to F$ par : $g(x)$ est la limite de $(f(a_n))_n$, pour toute suite $(a_n)_n$ dans A de limite x. En particulier – cas des suites constantes – g prolonge f. Enfin, g est continue car séquentiellement continue. En effet, pour toute suite $(x_n)_n$ dans E, on peut choisir une suite $(a_n)_n$ dans A telle que $d(a_n, x_n)$ et $d(f(a_n), g(x_n))$ tendent vers 0 (par exemple pour chaque n on choisit pour a_n, dans une suite $(a_{n,k})_k$ de A convergeant vers x_n donc d'image par f convergeant vers $g(x_n)$, un terme d'indice k assez grand pour que $d(a_{n,k}, x_n) \leq 1/n$ et $d(f(a_{n,k}), g(x_n)) \leq 1/n$). Si $(x_n)_n$ converge vers x, on en déduit alors que $(a_n)_n$ aussi, donc $(f(a_n))_n$ converge vers $g(x)$, donc $(g(x_n))_n$ aussi. □

Théorème 3.25 Existence et unicité du complété.
- *Pour tout espace métrique E, il existe un espace métrique complet $\hat{E}$ dont E est (à bijection isométrique près) un sous-espace dense.*
- *Un tel $\hat{E}$ est unique au sens suivant : si E est un sous-espace d'un espace métrique complet $\hat{E}'$ et si toute injection isométrique de E dans un espace métrique complet F s'étend de façon unique en une application continue de $\hat{E}'$ dans F, alors il existe entre $\hat{E}$ et $\hat{E}'$ une bijection isométrique fixant les points de E.*

L'espace $\hat{E}$ est appelé le complété de E.
Démonstration.
- On peut plonger E dans l'espace $B(E, \mathbb{R})$ des fonctions bornées de E dans $\mathbb{R}$, qui est complet pour la distance e_∞ (définie au §3.1) : on fixe arbitrairement un point a de E, on associe à tout élément x de E la fonction f_x définie par $f_x(z) = d(x, z) - d(a, z)$, et on vérifie que pour tous x et y dans E, $e_\infty(f_x, f_y) = d(x, y)$. On prend alors pour $\hat{E}$ l'adhérence dans $B(E, \mathbb{R})$ de l'image de E.
- L'inclusion de E dans $\hat{E}'$ s'étend en une application continue f de $\hat{E}$ dans $\hat{E}'$ (d'après le théorème de prolongement) et l'inclusion de E dans $\hat{E}$ s'étend en une application continue g de $\hat{E}'$ dans $\hat{E}$ (par hypothèse d'existence des prolongements à $\hat{E}'$). La composée $f \circ g$, de $\hat{E}'$ dans lui-même, est alors un prolongement continu de l'inclusion de E dans $\hat{E}'$ donc (par hypothèse d'unicité des prolongements à $\hat{E}'$) c'est l'identité, si bien que f est surjective. Comme elle est continue, elle est isométrique (donc injective) non seulement sur la partie dense E mais sur $\hat{E}$ tout entier. □

3.9 Théorème de point fixe

Définition 3.26
- *Une application entre deux espaces métriques est dite contractante, ou k-contractante, si elle est k-lipschitzienne pour un certain $k < 1$.*
- *Un point fixe de f est un élément x tel que $f(x) = x$.*

Le théorème suivant est particulièrement utile dans la théorie des équations différentielles ou intégrales.

Théorème 3.27 Théorème du point fixe de Picard-Banach. *Soient X un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ k-contractante. Alors f admet un unique point fixe ℓ et pour tout $x_0 \in E$, la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers ℓ et, plus précisément, $d(x_n, \ell) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.*

Démonstration. L'unicité résulte simplement du fait que f est contractante. Par récurrence, $d(x_i, x_{i+1}) \leq k^i d(x_0, x_1)$ donc par inégalité triangulaire,

$$\forall m \geq n, d(x_n, x_m) \leq \sum_{n \leq i < m} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{n \leq i < m} k^i d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

et ce majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui prouve que la suite x est de Cauchy donc converge vers une limite ℓ, vérifiant la majoration annoncée (par passage à la limite quand $m \to \infty$) et $f(\ell) = \ell$ (puisque $f(x_n) = x_{n+1}$ et que f est continue). □

Corollaire 3.28 Cas où une itérée est contractante. *Soient X un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ telle que f^p soit contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Alors f admet un unique point fixe ℓ et pour tout $x_0 \in E$, la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Soit ℓ l'unique point fixe de f^p. Tout point fixe par f est fixe par f^p donc égal à ℓ. Réciproquement, ℓ est fixe par f, car $f(\ell)$ est fixe par f^p donc égal à ℓ. Enfin, ℓ est limite de chacune des p suites $(f^{r+np}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $r = 0, \ldots, p-1$, donc aussi de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. □

Remarque. On n'a pas eu besoin de supposer f continue. Par exemple l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(0) = 1/2$ et $\forall x \in]0,1], f(x) = 1$, bien que discontinue, est de carré constant (donc 0-contractant) et son unique point fixe est 1.

Corollaire 3.29 Théorème du point fixe avec paramètre. *Soient X un espace métrique complet non vide, T un espace topologique, $k < 1$ et $f : T \times X \to X$ telle que $f(t, \ )$ soit k-contractante pour tout $t \in T$ et $f(\ , x)$ soit continue pour tout $x \in X$. Alors $f(t, \ )$ admet un unique point fixe x_t pour tout $t \in T$ et l'application $T \to X, t \mapsto x_t$ est continue.*

Démonstration. Il reste à prouver la continuité de $t \mapsto x_t$. Remarquons d'abord (dans l'intention de faire tendre t et x vers s et y fixés) que

$$d(f(t,x), f(s,y)) \le d(f(t,x), f(t,y)) + d(f(t,y), f(s,y)) \le kd(x,y) + d(f(t,y), f(s,y))$$

(ce qui prouve au passage que les hypothèses sur f entraînent qu'elle est continue non seulement séparément par rapport aux deux variables, mais par rapport au couple). En appliquant cette majoration à $x = x_t$ et $y = x_s$, on en déduit :

$$d(x_t, x_s) \le \frac{d(f(t,x_s), f(s,x_s))}{1-k}.$$

Pour s fixé, quand $t \to s$, le majorant tend vers 0 donc $x_t \to x_s$. □

Chapitre 4

Compacité

4.1 Propriété de Borel-Lebesgue

On appelle *recouvrement* d'une partie Y de X toute famille $(U_i)_{i \in I}$ de parties de X dont la réunion $\cup_{i \in I} U_i$ contient Y, et sous-recouvrement, toute sous-famille $(U_i)_{i \in J}$, $J \subset I$ qui constitue encore un recouvrement. Si X est un espace topologique, un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ est dit ouvert si tous les U_i sont des ouverts de X.

Définition 4.1 *Un espace compact est un espace séparé X vérifiant la* **propriété de Borel-Lebesgue***, c'est-à-dire tel que tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini. Une partie d'un espace topologique est dite compacte si c'est un compact pour la topologie induite.*

Remarques. La compacité est clairement une propriété topologique, c'est-à-dire invariante par homéomorphismes.
D'après la définition de la topologie induite, une partie Y de X est compacte lorsqu'elle est séparée et que tout recouvrement de Y par des ouverts de X possède un sous-recouvrement fini.
Exemples. (Exercice, TD4)
- Un espace fini séparé est compact.
- Un espace discret est compact si et seulement s'il est fini.
- Dans un espace séparé, étant donnée une suite convergente, l'ensemble constitué des termes de la suite ainsi que de la limite est compact.

Par passage aux complémentaires et contraposée, on obtient immédiatement :

Proposition 4.2 *La propriété de Borel-Lebesgue équivaut à : toute famille de fermés dont les sous-familles finies sont d'intersection non vide est elle-même d'intersection non vide.*

Théorème 4.3 *Dans un espace séparé, deux parties compactes disjointes sont toujours incluses dans deux ouverts disjoints.*

Démonstration. Prouvons-le d'abord dans le cas où l'un des deux compacts est un singleton. Soient K un compact d'un espace séparé X et x un point du complémentaire $X \setminus K$. Comme X est séparé, pour tout $y \in K$, il existe deux ouverts disjoints $O_y \ni y$ et $U_y \ni x$. Les ouverts O_y pour $y \in Y$ recouvrent alors Y ; on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(O_y)_{y \in F}$. L'ouvert $O := \cup_{y \in F} O_y$ contient K ; l'ensemble $U := \cap_{y \in F} U_y$ est disjoint de O et contient x, et il est aussi ouvert car F est fini.
Déduisons le théorème du cas particulier précédent, par la même technique. Soient K et K' deux compacts disjoints dans un espace séparé X. Pour tout $x \in K'$ il existe, d'après le cas particulier, deux ouverts disjoints $O_x \supset K$ et $U_x \ni x$. Le recouvrement $(U_x)_{x \in K'}$ de K' possède un sous-recouvrement fini $(U_x)_{x \in F}$, dont la réunion est disjointe de l'ouvert $\cap_{x \in F} O_x \supset K$. $\square$

Proposition 4.4

1. *Tout fermé d'un compact est compact.*
2. *Toute partie compacte d'un espace séparé est fermée.*

Démonstration. Le premier point résulte immédiatement de la proposition 4.2 et du fait que si F est un fermé d'un espace X alors tout fermé de F (pour la topologie induite) est un fermé de X. Pour le second, montrons que pour tout compact K d'un espace séparé X, le complémentaire de K est voisinage de tous ses points. Soit $x \in X \setminus K$; d'après le (cas particulier du) théorème précédent, K et $\{x\}$ sont inclus dans deux ouverts disjoints. Il existe donc bien un ouvert inclus dans $X \setminus K$ et contenant x. □

Un corollaire de la proposition 4.2 est que dans un compact, toute suite décroissante de fermés non vides est d'intersection non vide. Compte tenu de la proposition précédente, ceci se reformule en :

Corollaire 4.5 Théorème des compacts emboîtés. *L'intersection de toute suite décroissante de compacts non vides est un compact non vide.*

Proposition 4.6 *Dans un espace compact, toute partie infinie a des points d'accumulation donc toute suite a des valeurs d'adhérences, et si elle n'en a qu'une alors elle converge.*

Démonstration. Toute partie sans point d'accumulation est fermée (TD2) donc compacte si l'espace l'est. Comme elle est de plus discrète (TD2), elle est finie.
Dans tout espace séparé, si une suite n'a pas de valeur d'adhérence alors l'ensemble de ses valeurs est infini (car chaque valeur n'est prise qu'un nombre fini de fois) et n'a pas de point d'accumulation, donc l'espace est non compact d'après le point précédent.
Si une suite x ne converge pas vers a alors il existe un ouvert contenant a et excluant tous les termes d'une sous-suite y. Si l'espace est compact, le complémentaire de l'ouvert l'est aussi donc d'après le point précédent, y possède une valeur d'adhérence différente de a, donc x aussi. □
Exercice. (TD4) Redémontrer directement que dans un compact toute suite a des valeurs d'adhérences, à partir de son expression classique comme intersection de fermés (cf.proposition 2.10).
Remarque. La réciproque est fausse (il existe même des contre-exemples – c'est-à-dire des espaces non compacts où toute suite possède pourtant des valeurs d'adhérence – qui sont séparés et à bases dénombrables de voisinages). Nous verrons cependant dans la prochaine section, grâce au lemme suivant, que pour un espace métrique elle est vraie (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Lemme 4.7 *Pour qu'un espace séparé X soit compact, il suffit que tout recouvrement de X par des ouverts* **d'une base fixée** *possède un sous-recouvrement fini.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X vérifiant cette hypothèse et (U_i) un recouvrement ouvert arbitraire de X. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts $O \in \mathcal{B}$ inclus dans au moins un U_i et montrons que $\mathcal{C}$ recouvre X. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, chaque U_i est une réunion d'ouverts $O \in \mathcal{B}$, et même $O \in \mathcal{C}$ puisque $O \subset U_i$, donc chaque U_i est inclus dans la réunion de tous les $O \in \mathcal{C}$, si bien que la réunion X des U_i l'est aussi, donc $\mathcal{C}$ recouvre bien X. Par hypothèse sur $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ possède alors un sous-recouvrement fini F. Pour chaque $O \in F$, si l'on note $i(O)$ l'un des i pour lesquels $O \subset U_i$, la famille $(U_{i(O)})_{O \in F}$ est un sous-recouvrement fini de (U_i). □

4.2 Espaces métriques compacts

Tout espace métrique compact est *évidemment* précompact, c'est-à-dire :

Définition 4.8 *Un espace métrique X est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, X est recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.*

Propriétés immédiates :
- On obtient une définition équivalente en remplaçant les ε-boules ouvertes par des ε-boules fermées, ou par des parties de diamètres majorés par ε.
- Tout métrique précompact est borné.
- Dans un espace métrique, une partie est précompacte si et seulement si son adhérence l'est.

Proposition 4.9 *Tout espace métrique précompact est à base dénombrable d'ouverts.*

Démonstration. Pour tout entier $n > 0$, on peut recouvrir l'espace par un ensemble fini de boules ouvertes de rayon $1/n$. La réunion de de tous ces ensembles finis est alors un ensemble au plus dénombrable de boules, et constitue une base d'ouverts d'après le lemme 3.4. $\square$

Exemple 4.10 Exemple d'e.v.n. (de dimension infinie) où les suites bornées n'ont pas forcément de sous-suite convergente ni même de Cauchy : ℓ^2 (les suites de réels de carrés sommables) et la suite (de suites) $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où δ_n est la suite qui vaut 1 au rang n et 0 ailleurs.

Proposition 4.11 *Un espace métrique X est précompact si et seulement si toute suite dans X possède une sous-suite de Cauchy.*

Démonstration.
($\Rightarrow$) Soit x une suite dans X précompact. Recouvrons X par un nombre fini de parties de diamètres inférieurs à $2^0 = 1$. L'une au moins de ces parties – notons-la X_0 – contient une infinité de termes de la suite x, i.e. une sous-suite $(x_{\varphi(0,n)})_n$. On peut de même recouvrir X_0 par un nombre fini de parties de X_0 de diamètres inférieurs à 2^{-1} et l'une d'elles, X_1, contiendra une sous-suite $(x_{\varphi(1,n)})_n$ de $(x_{\varphi(0,n)})_n$. En itérant le processus, on construit une suite décroissante de parties X_k de diamètres respectivement inférieurs à 2^{-k}, dont chacune contient une sous-suite $(x_{\varphi(k,n)})_n$ de la sous-suite précédente $(x_{\varphi(k-1,n)})_n$. La sous-suite diagonale $(x_{\varphi(n,n)})_n$ est alors une sous-suite de Cauchy de x.

($\Leftarrow$) Raisonnant par contraposée, considérons un espace X non précompact et construisons dans X une suite sans sous-suite de Cauchy. Pour un certain $\varepsilon > 0$, X n'est pas réunion finie de boules de rayon ε. Ceci permet de construire par récurrence une suite $(x_n)_n$ de points de X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \notin \cup_{k<n} B\left(x_k, \varepsilon\right)$$

Cette suite vérifie alors :

$$\forall \left(i, j\right) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow d\left(x_i, x_j\right) \geq \varepsilon$$

donc elle n'admet pas de sous-suite de Cauchy. $\square$

Corollaire 4.12 *Pour un espace métrique X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) X est compact ;
(2) toute partie infinie de X a un point d'accumulation ;
(3) toute suite dans X possède une sous-suite convergente ;
(4) X est précompact et complet.

Démonstration. (3) $\Leftrightarrow$ (4) résulte immédiatement de la proposition précédente, et l'on a déjà vu (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) (propositions 4.6 et 2.43). Supposons donc que X vérifie (3) et montrons qu'il est compact (c'est le **théorème de Bolzano-Weierstrass**). D'après ce qui précède, il est précompact donc à base dénombrable d'ouverts. Pour montrer que X est compact, il suffit alors – cf. lemme 4.7 – de vérifier que tout recouvrement ouvert *dénombrable* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un sous-recouvrement fini. Si tel n'était pas le cas, il existerait, pour tout n, un point x_n n'appartenant à aucun des U_k pour $k \leq n$, et cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'aurait pas de valeur d'adhérence. $\square$

Corollaire 4.13 *(cas très particulier du* **théorème de Tychonoff***) Le produit de deux espaces métriques compacts est compact.*

Démonstration. Soient X et Y deux espaces métriques compacts et $(x,y) = ((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans leur espace métrique produit. La suite x admet une sous-suite convergente $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ et la sous-suite $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ admet une (sous-)sous-suite convergente $(y_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$. La sous-suite $((x_{n_{i_j}}, y_{n_{i_j}}))_{j\in\mathbb{N}}$ de (x,y) converge. □
(En fait, tout produit au plus dénombrable d'espaces séquentiellement compacts – non nécessairement métrisables – est séquentiellement compact, et tout produit d'espaces compacts est compact, mais ceci est hors programme puisque nous n'avons défini que les produits finis.)

Corollaire 4.14 Théorème de Heine-Borel-Lebesgue. *Une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte si (et seulement si) elle est fermée et bornée.*

Démonstration. Conséquence immédiate des deux corollaires ci-dessus et du "théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles" (cf. §1.2). □
Remarque. Puisque $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à un segment réel, il est compact.

4.3 Compacité et continuité

Proposition 4.15 *L'image continue d'un compact dans un séparé est compacte, c'est-à-dire : si X est compact, Y séparé et $f : X \to Y$ continue, alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration. Soient U_i des ouvert de $f(X)$ (pour la topologie induite) recouvrant $f(X)$; les $O_i := f^{-1}(U_i)$ forment alors un recouvrement ouvert de X, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $(O_i)_{i\in F}$. Les $U_i = f(O_i)$ pour $i \in F$ recouvrent $f(X)$. □
On dit qu'une application $f : X \to Y$ est fermée si pour tout fermé F de X, $f(F)$ est un fermé de Y (lorsque f est bijective, cela équivaut *clairement* à la continuité de f^{-1}). On déduit alors de la proposition précédente, grâce à la proposition 4.4 :

Corollaire 4.16 *Toute application continue d'un compact dans un séparé est fermée. En particulier, si elle est bijective alors c'est un homéomorphisme.*

La proposition ci-dessus donne aussi, grâce au théorème de Heine-Borel-Lebesgue (corollaire 4.14) :

Corollaire 4.17 *Toute application continue d'un compact non vide dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

(Plus généralement : toute application continue d'un compact non vide dans $\overline{\mathbb{R}}$ atteint ses bornes, donc est bornée si elle est à valeurs réelles.)

Théorème 4.18 Théorème de Heine. *Toute application continue d'un métrique compact dans un métrique est uniformément continue.*

Démonstration. Soient $f : X \to Y$ comme dans l'énoncé, et $\varepsilon > 0$. Si le compact

$$K := \{(x,y) \in X \times X \mid d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\}$$

est non vide, en posant $\eta = \inf_K d$ on a, d'après le corollaire : $\eta > 0$. □
Exercice. Montrer qu'une fonction entre deux espaces métriques est Cauchy-continue si et seulement si elle est uniformément continue sur toute partie précompacte.

Corollaire 4.19 *Toute application continue d'un segment réel* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est approximable uniformément par des fonctions continues affines par morceaux.*

Démonstration. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ associé à ε par le théorème de Heine. On choisit une "subdivision de pas inférieur à η", c'est-à-dire une suite finie de points $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ telle que $x_k - x_{k-1} < \eta$ pour $k = 1, \ldots, n$. Soit g la fonction qui en chaque x_k vaut $y_k := f(x_k)$ et qui est affine entre deux x_k consécutifs. Alors, pour tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $f(x) - g(x)$ est compris entre $f(x) - y_{k-1}$ et $f(x) - y_k$, qui sont tous deux de valeur absolue inférieure à ε, donc $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. □

En remarquant que ces approximantes sont des combinaisons affines de fonctions de la forme $x \mapsto (x - \alpha)^+$, avec $y^+ = \max(0, y) = (y + |y|)/2$ et que la fonction valeur absolue est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de polynômes, on va en déduire la preuve par Lebesgue du **théorème classique d'approximation de Weierstrass** :

Corollaire 4.20 *Toute application continue d'un segment réel* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est approximable uniformément par des fonctions polynomiales.*

Démonstration. (Queffélec p. 12 et Choquet p. 142-143, cf.bibliographie.)
La fonction g de la preuve précédente s'écrit $g(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x - x_{k-1})^+$ pour des λ_k convenablement choisis : $\lambda_0 = g(x_0)$, λ_1 est la pente de la "première corde" du graphe de g (de x_0 à x_1) et pour tout $k \geq 1$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ est la variation de pente, de la "k-ième corde" à la suivante.
Il suffit donc d'approximer par des polynômes la fonction valeur absolue sur $[-M, M]$ pour M arbitraire ou seulement (par homothétie sur la variable) pour $M = 1$.
Pour cela, écrivons $|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$ et utilisons la formule du binôme généralisée :

$$\forall u \in]-1,1[\quad \sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n \text{ avec } a_n = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\ldots(n-1-\frac{1}{2})}{n!}.$$

Les a_n sont positifs. Montrons qu'ils forment une série convergente : ainsi, la fonction $\sqrt{1-u}$ sera limite des $P_N(u) := 1 - \sum_{n=1}^{N} a_n u^n$ non seulement pour $u \in]-1,1[$ et au sens de la convergence simple, mais pour $u \in [-1,1]$ (en particulier pour $u \in [0,1]$) et au sens de la convergence uniforme, donc $|x|$ sera limite des polynômes $P_N(1 - x^2)$, uniformément par rapport à $x \in [-1, 1]$, ce qui terminera la preuve.
Pour tout entier $N > 0$ et tout $u \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{N} a_n u^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n = 1 - \sqrt{1-u}$$

donc $\sum_{n=1}^{N} a_n u^n < 1$ donc (pour N fixé, en faisant $u \to 1^-$) $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq 1$ puis (en faisant, seulement ensuite, tendre N vers l'infini) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1$. □
Mentionnons sa généralisation, qui ne sera pas démontrée dans ce cours.

Théorème 4.21 Théorème d'approximation de Stone-Weierstrass. *Soient* X *compact et* A *une sous-algèbre unifère de l'algèbre de Banach* $C(X)$ *des fonctions continues de* X *dans* $\mathbb{R}$ *(munie de la norme de la convergence uniforme). Si* A *sépare les points de* X*, alors* A *est dense dans* $C(X)$*.*

(On dit que A sépare les points de X si pour toute paire $\{x, y\} \subset X$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$; dire que A est une sous-algèbre unifère revient à dire qu'elle est stable par sommes, produits et produit par un réel et contient la fonction constante 1.)

Chapitre 5

Connexité

5.1 Définition et premiers exemples

Définition 5.1 *Les conditions suivantes sont équivalentes et un espace topologique X est dit connexe s'il les vérifie.*

1. *X n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints ;*
2. *X n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints ;*
3. *tout ouvert fermé non vide de X est égal à X ;*
4. *les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et X ;*
5. *toute application continue de X dans l'espace discret $\{0,1\}$ est constante.*

Une partie C de X est dite connexe si C muni de la topologie induite est un espace connexe.

Remarque. C est donc non connexe si et seulement s'il est inclus dans la réunion de deux ouverts U et V de X tels que U et V rencontrent C et $U \cap V$ ne rencontre pas C. Il n'est pas nécessaire que U et V soient disjoints (et c'est parfois même impossible, cf. exemple 4 ci-dessous) mais si X est un espace métrique, on peut faire en sorte qu'ils le soient. En effet, en notant $U' = U \cap C$ et $V' = U \cap C$, on a $U' \cap \overline{V'} = \varnothing$ et $V' \cap \overline{U'} = \varnothing$. En posant alors $U'' = \{x \in X \mid d(x, U') < d(x, V')\}$ et $V'' = \{x \in X \mid d(x, V') < d(x, U')\}$, on obtient deux ouverts de X vérifiant les conditions voulues. (Cette propriété se généralise à tout espace X complètement normal.)

Exemples.

1. La topologie grossière (sur n'importe quel ensemble) est connexe.
2. La topologie discrète n'est connexe que si l'ensemble est $\varnothing$ ou un singleton.
3. En fait, plus une topologie est fine, moins elle a de chances d'être connexe. (Plus formellement : sur un même ensemble, toute topologie moins fine qu'une topologie connexe est encore connexe ; cette propriété sera généralisée par le point 3 de la proposition 5.4).
4. Dans $X = \{-1, 0, 1\}$ muni de la topologie dont les ouverts sont $\varnothing$ et les parties contenant 0, la partie $\{-1, 1\}$ est discrète donc non connexe.
5. Dans $\mathbb{Q}$ (pour la topologie usuelle), les seuls connexes sont $\varnothing$ et les singletons : on dit que $\mathbb{Q}$ est "totalement discontinu". Un espace peut donc être totalement discontinu sans tout de même être discret.
6. Montrer que l'ensemble de Cantor est un fermé de $\mathbb{R}$ non dénombrable et totalement discontinu.

Dans un ensemble totalement ordonné, définissons les intervalles comme les parties qui, chaque fois qu'elles contiennent deux éléments, contiennent tout élément compris entre les deux ($x, y \in I$ et $x < z < y \Rightarrow z \in I$). Pour la topologie de l'ordre sur cet ensemble, une partie connexe ne peut être qu'un intervalle (pourquoi ?). La réciproque n'est pas toujours vraie (penser à $\mathbb{Q}$) mais l'est dans $\mathbb{R}$:

Proposition 5.2 *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Tout intervalle réel est connexe d'après la cinquième caractérisation et le TVI (théorème des valeurs intermédiaires), puisqu'une application continue à valeurs dans $\{0,1\}$ discret n'est rien d'autre – par corestriction, cf. corollaire 2.39 – qu'une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui ne prend, au plus, que les valeurs 0 et 1.
Le TVI se déduit de la propriété de la borne supérieure (§1.2), soit directement, soit – moins directement mais plus intuitivement – par dichotomie, donc en se ramenant au théorème des suites adjacentes, ou des fermés emboîtés (théorème 3.21), ou des compacts emboîtés (corollaire 4.5). Mais une autre option est déduire le TVI du point 3 de la proposition 5.4 ci-dessous joint à la présente proposition, et de démontrer celle-ci par une dichotomie plus simple. □

De même que la compacité, la connexité est clairement une propriété topologique.
Exemples d'application : le cercle S^1 n'est homéomorphe à aucune partie I de $\mathbb{R}$ car un tel I serait un intervalle d'extrémités a,b distinctes or pour $a<c<b$, $I\setminus\{c\}$ n'est pas connexe, tandis que S^1 privé d'un point l'est (puisqu'il est homéomorphe à un intervalle). Par des raisonnements analogues, $[0,1[$, $]0,1[$ et $[0,1]$ sont deux à deux non homéomorphes.

5.2 Propriétés

Proposition 5.3 *("lemme de* **passage à la douane***") Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie A et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de A.*

Démonstration. Si C est disjoint de $\mathrm{Fr}A$ alors $C\cap A$ et $C\setminus A$ sont égaux à $C\cap \mathring{A}$ et $C\setminus\overline{A}$, ouverts de C. □

Proposition 5.4

1. *L'***adhérence** *d'une partie connexe est connexe. Plus généralement : si C est connexe et $C\subset A\subset\overline{C}$ alors A est connexe.*
2. *Toute* **réunion d'une famille d'intersection non vide** *de connexes est connexe.*
3. *L'***image continue** *d'un connexe est connexe, c'est-à-dire que pour tout connexe C et toute application continue $f: C\to Y$, $f(C)$ est un connexe de Y.*
4. *Un* **produit** *$X\times Y$ d'espaces non vides est connexe si (et seulement si) X et Y le sont.*

Par exemple : $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement tout produit d'intervalles réels) est connexe.
Démonstration. L'ensemble $\{0,1\}$ est muni ici de la topologie discrète.

1. Soient A,C comme dans l'énoncé et $f: A\to\{0,1\}$ continue. Alors f est constante sur C donc (cf. proposition 2.42) sur son adhérence dans A, qui (cf. exercice 2.11) est égale à A.
2. Soient des connexes C_i contenant tous un même point a, et C leur réunion. Une application continue $f: C\to\{0,1\}$ vaut alors $f(a)$ sur chaque C_i donc sur C.
3. Si $g: f(C)\to\{0,1\}$ est continue alors $g\circ f$ est continue sur C donc constante, si bien que g est constante sur $f(C)$.
4. (Le "seulement si" résulte du point précédent, par continuité des projections et non-vacuité des deux espaces. Le "si" est sans intérêt lorsque l'un des deux espaces est vide car le produit est alors vide donc connexe.) Soient X,Y connexes, $y_0\in Y$ et $f: X\times Y\to\{0,1\}$ continue. Pour tout $x\in X$, sur le sous-espace $\{x\}\times Y$ (connexe car homéomorphe à Y), f vaut constamment $f(x,y_0)$. Par connexité de $X\times\{y_0\}$ (homéomorphe à X), tous ces $f(x,y_0)$ sont égaux, donc f est constante. □

Exercice. (TD5) Redémontrer le point 4 en utilisant (deux fois) le point 2.
Remarque. Pour qu'une réunion de connexes C_i soit connexe, il suffit que les C_i soient deux à deux non disjoints, ou que tous rencontrent l'un deux, ou encore (s'il s'agit d'une suite) que chacun rencontre le suivant.
Exercice. (TD5) Montrer que si C et C' sont deux parties connexes d'un espace topologique telles que C' rencontre $\overline{C}$ alors $C \cup C'$ est connexe.

Exercice 5.5 Montrer que si $A \cup B$ et $A \cap B$ sont connexes et si A et B sont tous deux ouverts (ou tous deux fermés) alors ils sont connexes. (Indication : remarquer que si U et V sont complémentaires dans A et si $A \cap B \subset U$, alors V et $U \cup B$ sont complémentaires dans $A \cup B$.)

Exercice. Les parties suivantes du plan sont-elles connexes ?
$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$, $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})]$.
Exercice. Une intersection décroissante de fermés connexes du plan est-elle toujours connexe ? (Indication : penser à une échelle de longueur infinie.)

5.3 Connexité par arcs

Des points 2 et 3 de la proposition 5.4 découle naturellement la notion topologique – clairement plus forte et stable elle aussi par images continues – de **connexité par arcs** : X est dit connexe par arcs si deux quelconques de ses points peuvent être joints par un chemin continu, c'est-à-dire sont égaux à $f(0)$ et $f(1)$ pour une certaine application continue $f : [0,1] \to X$ ou ce qui revient au même : si tout point de X peut être joint ainsi à un point fixé x_0.
Exemples.
- dans $\mathbb{R}$, tous les connexes (les intervalles) sont connexes par arcs ;
- plus généralement, dans un espace vectoriel normé, tout convexe est connexe par arcs (une partie C est dite convexe si $\forall x, y \in C, [x, y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subset C$), et même toute partie étoilée ;
- $\mathbb{R}^n$ privé d'un point est connexe (par arcs) si $n > 1$ (mais pas si $n = 1$, donc $\mathbb{R}$ n'est homéomorphe à aucun $\mathbb{R}^n$ pour $n > 1$).

La connexité par arcs est une propriété strictement plus forte que la connexité. On a cependant le résultat suivant :

Proposition 5.6 *Soit X un espace connexe. Si tout point de X a un voisinage connexe par arcs, alors X est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $x_0 \in X$ et A l'ensemble des points de X joints à x_0 par un chemin. Tout connexe par arcs V qui rencontre A est inclus dans A (en mettant bout à bout un chemin d'un point de V à un point $x \in V \cap A$ et un chemin de x à x_0). Par conséquent, l'ensemble (non vide) A est à la fois ouvert (si $x \in A$ et si V est un voisinage connexe par arcs de x alors $V \subset A$, donc A est voisinage de tous ses points) et fermé (si $x \in \overline{A}$ et si V est un voisinage connexe par arcs de x alors V rencontre A donc $V \subset A$ donc $x \in A$, donc A contient tous ses points adhérents) donc $A = X$.□

Corollaire 5.7 *Dans un espace localement connexe par arcs, un ouvert est connexe (si et) seulement s'il est connexe par arcs.*

Démonstration. Tout ouvert O d'un espace X localement truc est encore localement truc, car pour tout $x \in O$, si $\mathcal{F}$ est une base de voisinages de x dans X alors le sous-ensemble $\{V \in \mathcal{F} \mid V \subset O\}$ est une base de voisinages de x dans O (pourquoi ?). En particulier, si O est un ouvert connexe d'un espace localement connexe par arcs alors O est lui-même localement connexe par arcs donc dans O, tout point a une base de voisinages connexes par arcs et *a fortiori*, a au moins un voisinage connexe par arcs. □
Remarque. En particulier, tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

5.4 Composante connexe

Soit X un espace topologique.

Définition 5.8 *La composante connexe d'un point $x \in X$ est la réunion des parties connexes de X contenant x.*

C'est donc le plus grand connexe contenant x, et les composantes connexes forment une partition de X, comme classes de la relation d'équivalence "appartenir à un même connexe".

Les composantes connexes sont toujours fermées dans X (pourquoi ?) – donc aussi ouvertes s'il n'y en a qu'un nombre fini – mais pas ouvertes en général (penser à $X = \mathbb{Q}$). Elle le sont cependant si tout point de X a un voisinage connexe (pourquoi ?), en particulier si X est localement connexe (propriété plus forte mais dont l'intérêt est que tout ouvert d'un localement connexe est localement connexe, cf. preuve du corollaire ci-dessus).

Par exemple, les **composantes connexes d'un ouvert** U **de** $\mathbb{R}$ forment une partition de U en intervalles ouverts. (De plus, cette famille F d'intervalles est au plus dénombrable, car on peut définir très naturellement une surjection de $U \cap \mathbb{Q}$ dans F : cf. TD1.)

Il existe une notion analogue de composantes connexes par arcs (*a priori* plus petites car correspondant à une relation d'équivalence plus fine : chaque composante connexe est une réunion disjointe de composantes connexes par arcs). Attention, l'adhérence d'une partie connexe par arcs n'est pas toujours connexe par arcs (penser au graphe de $\sin(1/x)$) donc les composantes connexes par arcs ne sont pas toujours fermées, contrairement aux composantes connexes. Mais beaucoup d'autres propriétés ci-dessus de la connexité sont encore vraies pour la connexité par arcs (exemples : points 2, 3 et 4 de la proposition 5.4 et exercice 5.5 + dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs sont ouvertes).

De même que la (non-)connexité, le "nombre" – au sens : cardinalité – des composantes connexes (ou celui des composantes connexes par arcs) d'un espace est clairement invariant par homéomorphismes, et même le nombre de composantes de chaque cardinal.

Deuxième partie

Espaces vectoriels normés

Chapitre 6

Généralités

6.1 Exemples

On a déjà défini les espaces vectoriels normés, comme exemples d'espaces métriques, ainsi que les espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets) et vu les exemples $\mathbb{R}^n$, ℓ^p (qui se généralisent en $L^p(\mu)$, cf. cours d'intégration).

On a aussi rencontré, pour tout espace métrique E, les espaces métriques $B(X, E)$ (si X est un ensemble) et $C(X, E) \cap B(X, E)$ (si X est un espace topologique), qui sont complets si E l'est. Lorsque l'espace métrique E est en fait un espace vectoriel normé, on peut définir la structure uniforme de ces deux espaces plus directement par la **norme de la convergence uniforme** :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Généralisation : pour $a \in [0, 1]$, l'espace $C(X, E)^{0,a}$ des fonctions a-höldériennes bornées d'un espace métrique X dans un espace vectoriel normé E est muni naturellement de la norme

$$\|f\|_a := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)^a}.$$

Si E est de Banach – par exemple $E = \mathbb{R}$ – alors $C(X, E)^{0,a}$ aussi.

6.2 Propriétés immédiates

On suppose dans la suite que $(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé (en abrégé : E est un e.v.n.) et on le munit de la topologie associée à la distance $d(x, y) = \|x - y\|$. (La suite s'applique donc aussi – par oubli de la structure complexe – à tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé F, y compris les considérations sur la finitude de la dimension puisque $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(F)$.)

Premières propriétés :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- la norme et la distance sont non bornées (sauf si $E = \{0_E\}$) ;
- d est invariante par translations (i.e. $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, autrement dit : chaque translation $x \mapsto x + z$ est une isométrie).

Remarque. Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, les diverses distances (uniformément équivalentes) dont on a muni le produit d'espaces métriques $E \times F$ s'avèrent – par construction – déduites de normes naturelles sur l'espace vectoriel produit $E \times F$, donc si E et F sont de Banach, alors $E \times F$ aussi pour une telle norme (par exemple celle définie par $\|(x, y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$).

Proposition 6.1 *E est un* **espace vectoriel topologique**, *c'est-à-dire que les deux applications $E \times E \to E, (x,y) \mapsto x+y$ et $\mathbb{R} \times E \to E, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues (sur les deux espaces topologiques produits).*

Démonstration.
Soient $(x,y),(x',y') \in E \times E$ et $\varepsilon = \|(x',y')-(x,y)\|_{E\times E} = \max((\|x'-x\|, \|y'-y\|)$:

$$\|(x'+y')-(x+y)\| \leq \|x'-x\| + \|y'-y\| \leq 2\varepsilon$$

donc l'application somme est lipschitzienne.
Soient $(\lambda,x),(\mu,y) \in \mathbb{R} \times E$ et $\varepsilon = \|(\mu,y)-(\lambda,x)\|_{\mathbb{R}\times E} = \max((|\mu-\lambda|, \|y-x\|)$, et soit M un majorant de $\|(\lambda,x)\|_{\mathbb{R}\times E}$ et de $\|(\mu,y)\|_{\mathbb{R}\times E}$:

$$\|\mu y - \lambda x\| \leq \|(\mu-\lambda)y\| + \|\lambda(y-x)\| \leq 2M\varepsilon$$

donc l'application $(\lambda,x) \mapsto \lambda x$ est localement lipschitzienne (i.e. lipschitzienne au voisinage de tout point), plus précisément : lipschitzienne sur toute partie bornée de $\mathbb{R} \times E$. □

Corollaire 6.2

1. *Les homothéties de rapport non nul et les translations sont des homéomorphismes de E dans E.*
2. *L'adhérence de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel.*
3. *L'adhérence et l'intérieur de tout convexe sont convexes.*

Démonstration.

1. Immédiat.
2. Essentiellement parce que (par continuité et en utilisant l'exercice 2.31) $\overline{F}+\overline{F} \subset \overline{F+F}$ et $\lambda\overline{F} \subset \overline{\lambda F}$.
3. Soit C convexe. Alors $\overline{C}$ est convexe par les mêmes arguments qu'au point précédent (puisque la convexité se traduit par : $f([0,1]\times C \times C) \subset C$, où f est l'application continue $[0,1]\times E \times E, (t,x,y) \mapsto tx+(1-t)y$). Montrons que $\mathring{C}$ l'est aussi. Si $x,y \in \mathring{C}$ et $z = tx+(1-t)y$ avec $t \in [0,1]$ alors $z \in \mathring{C}$. En effet, il existe un voisinage U de 0 tel que $x+U, y+U \subset C$, donc $z+U \subset C$ (car pour tout $u \in U$, $z+u = t(x+u)+(1-t)(y+u) \in [x+u, y+u] \subset C$). □

6.3 Applications linéaires continues

Proposition 6.3 *Soient E et F deux e.v.n. et $u : E \to F$ linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *u est continue ;*
2. *u est continue en 0 ;*
3. *u est bornée sur la boule unité $B'(0,1)$;*
4. *u est bornée sur toute boule de centre 0 (donc sur toute partie bornée) ;*
5. *u est lipschitzienne ;*
6. *u est uniformément continue.*

Démonstration. $(5 \Rightarrow 6)$, $(6 \Rightarrow 1)$ et $(1 \Rightarrow 2)$ sont immédiats.
$(2 \Rightarrow 3)$: soit $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leq \eta \Rightarrow \|u(x)\| \leq 1$. Alors, $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|u(x)\| \leq 1/\eta$.
$(3 \Rightarrow 5)$: soit M tel que $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|u(x)\| \leq M$. Alors $\|u(y)-u(x)\| \leq M\|y-x\|$.

$(3 \Leftrightarrow 4)$: soit M tel que $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|u(x)\| \leq M$. Alors pour tout réel R, $\|x\| \leq R \Rightarrow \|u(x)\| \leq MR$. □

Définition 6.4 *La* **norme d'une application linéaire continue** $u : E \to F$, *notée* $\|u\|$, *est sa constante de Lipschitz, c'est-à-dire le plus petit réel* $M \geq 0$ *tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Autrement dit :

$$\|u\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \sup_{x\in E, \|x\|_E\leq 1} \|u(x)\|_F.$$

Remarque. La composée $v \circ u$ de deux applications linéaires continues $u : E \to F$ et $v : F \to G$ entre e.v.n. est linéaire continue et $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$.

Corollaire 6.5 *Pour deux distances déduites de deux normes* N_1 *et* N_2,
topologiquement équivalentes $\Leftrightarrow$ *uniformément équivalentes* $\Leftrightarrow$ *Lipschitz-équivalentes* $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1.$$

On dit alors simplement que N_1 et N_2 sont équivalentes.
Exemple. (cf. 12.6 TD6, ex. 1) Soit $\eta = (\eta_k)_k$ une suite bornée de réels. Montrons que la forme linéaire u sur ℓ^1 par :

$$\forall a = (a_k)_k \in \ell^1 \quad u(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k a_k$$

est continue et de norme égale à $\|\eta\|_\infty := \sup_k |\eta_k|$.
Pour vérifier que u est continue et $\|u\| \leq \|\eta\|_\infty$, il suffit de remarquer que $|u(a)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\eta\|_\infty |a_k| = \|\eta\|_\infty \|a\|_1$.
Pour montrer que $\|u\|$ est même *égale* à $\|\eta\|_\infty$, c'est-à-dire que $\|\eta\|_\infty$ est *la plus petite* constante M pour laquelle on a $\forall a \in \ell^1 \quad |u(a)| \leq M\|a\|_1$, il faut trouver une suite de vecteurs unitaires $x_n \in \ell^1$ telle que $u(x_n) \to \|\eta\|_\infty$. Si la suite des $|\eta_k|$ atteint sa borne supérieure, c'est-à-dire si $\|\eta\|_\infty = |\eta_N|$ pour un certain N, c'est facile : il existe même un vecteur unitaire x tel que $u(x) = \|\eta\|_\infty$: le vecteur $x = \delta_N$ (la suite qui vaut 1 en l'indice N et 0 ailleurs) ; on dit que "la norme de u est atteinte". Si la suite des $|\eta_k|$ n'atteint pas sa borne supérieure (par exemple si elle est strictement croissante), on se contente d'une suite de vecteurs unitaires $x_n = \delta_{k_n}$, où la suite des indices k_n est choisie telle que $|\eta_{k_n}| \to \|\eta\|_\infty$.

6.4 Espaces d'applications linéaires continues

On a vu que l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues entre deux e.v.n. E et F est naturellement muni d'une norme $\| \; \|$, composée de la restriction à la boule unité $B'(0_E, 1)$ et de la norme de la convergence uniforme sur cette boule.

Proposition 6.6 *Si* F *est un espace de Banach alors* $\mathcal{L}(E, F)$ *aussi. En particulier, le* **dual topologique** $E' = \mathcal{L}(E, K)$ *de tout espace vectoriel normé* E *sur* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Soient S la sphère unité de E et G l'e.v.n. (complet) des applications bornées de S dans F. L'application de restriction $\mathcal{L}(E, F) \to G, u \mapsto u_{|S}$ étant linéaire et isométrique, il suffit de vérifier que son image – l'ensemble des $v \in G$ qui s'étendent linéairement à E – est complète : elle est fermée dans G, comme intersection des fermés (noyaux d'applications linéaires continues) $\{v \in G \mid v(z) = \lambda v(x) + \mu v(y)\}$ pour tous les $(x, y, z, \lambda, \mu) \in S^3 \times K^2$ tels que $z = \lambda x + \mu y$. □

6.5 Applications multilinéaires continues

Le cas $n = 1$ se généralise, directement par le même raisonnement, ou bien par récurrence, en remarquant que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \simeq \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n-1}; \mathcal{L}(E_n, F))$:

Proposition 6.7 *Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des e.v.n. et $f : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ une application multilinéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *f est continue en 0 ;*
- *f est continue ;*
- *f est bornée sur le produit des boules unité des E_i ;*
- *il existe un réel $M \geq 0$ tel que*

$$\forall x_i \in E_i, \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}.$$

Définition 6.8 *La* **norme d'une application multilinéaire continue** *$f : E_1 \times \dots \times E_n \to F$, notée $|||f|||$, est le plus petit réel $M \geq 0$ tel que*

$$\forall x_i \in E_i, \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}.$$

Autrement dit :

$$|||f||| = \sup_{x_i \in E_i, x_i \neq 0} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}} = \sup_{x_i \in E_i, \|x_i\|_{E_i} = 1} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F = \sup_{x_i \in E_i, \|x_i\|_{E_i} \leq 1} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F.$$

Remarque. En généralisant le calcul fait pour l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ dans la proposition 6.1, on montre que toute application multilinéaire continue est lipschitzienne sur toute partie bornée.

Proposition 6.9 *Si F est un espace de Banach alors l'espace d'applications multilinéaires $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ muni de cette norme aussi.*

6.6 Noyaux et cas des formes linéaires

Si une application linéaire $u : E \to F$ est continue alors son noyau $\ker u$ est fermé. La réciproque est fausse (en dimension infinie on construit même facilement – 12.3 TD3, ex. 17 – des injections linéaires non continues et donc des normes non équivalentes). Cependant :

Proposition 6.10 *Toute forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$ de noyau fermé est continue, et tout hyperplan est soit fermé, soit dense.*

Démonstration. Soit H un hyperplan de E, c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle u sur E (entièrement déterminée par H, à proportionnalité près). Supposons u non continue et montrons qu'alors H n'est pas fermé et même, qu'il est dense dans E, c'est-à-dire que tout vecteur $e \notin H$ est limite d'éléments de H. Puisque $|||u||| = +\infty$, il existe une suite $(x_n)_n$ de vecteurs unitaires telle que $|u(x_n)| \to +\infty$. À partir d'un certain rang N, $u(x_n) \neq 0$, ce qui permet de définir $y_n := e - \frac{u(e)}{u(x_n)} x_n$. La suite $(y_n)_{n \geq N}$ est à valeurs dans H et converge vers e, ce qui conclut. □

Exemples. Il est facile de construire des exemples explicites de formes linéaires non continues (donc d'hyperplans denses), en dimension nécessairement infinie, sur des e.v.n. non complets, mais pour montrer qu'il en existe sur tout espace de Banach (et plus généralement tout e.v.n.) de dimension infinie, on a besoin du théorème de la base incomplète donc de l'axiome du choix.
- Exemple concret. Dans l'espace de Banach $(C([-1, 1]), \| \|_\infty)$, soit E le s.e.v. (non fermé) des fonctions dérivables en 0. La forme linéaire u sur E définie par $u(f) := f'(0)$ n'est pas continue : les fonctions $f_n \in E$ définies par $f_n(x) := \sin(nx)$ sont de norme ≤ 1 mais $u(f_n) = n \to \infty$.

– Exemple général. Dans un e.v.n. E de dimension infinie, soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable libre et $(f_i)_{i\in I}$ telle que la réunion de ces deux familles soit une base de E. La forme linéaire u sur E définie par $\forall n\in\mathbb{N} \quad u(e_n)=n\|e_n\|$ et (par exemple) $\forall i\in I \quad u(f_i)=0$ n'est pas continue.

6.7 E.v.n. de dimension finie

On va montrer entre autres qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. La preuve classique utilise des arguments de compacité mais une autre, qui se prête mieux à une généralisation à d'autres corps topologiques que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, résulte immédiatement du simple lemme suivant. En effet, ce lemme utilise seulement que $\mathbb{R}$ est complet (mais pas qu'il est localement compact).

Lemme 6.11 *Soit E un e.v.n. de dimension finie $n\in\mathbb{N}$. Alors E est complet et pour tout vecteur non nul $e\in E$ et tout hyperplan supplémentaire H (muni de la restriction de la norme de E), la réciproque f^{-1} de la bijection linéaire continue suivante est continue :*

$$f:H\times\mathbb{R}\to E,(x,\lambda)\mapsto x+\lambda e.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n=0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $n>0$ et (par hypothèse de récurrence) H complet. Montrons que f^{-1} est continue (E sera alors complet puisque $H\times\mathbb{R}$ l'est) c'est-à-dire que ses deux composantes, $v:E\to H$ et $u:E\to\mathbb{R}$, le sont. u l'est car c'est une forme linéaire de noyau (H, complet donc) fermé, si bien que v l'est aussi car $\forall x\in E, v(x)=x-u(x)e$. □

Corollaire 6.12 *Tout s.e.v. de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.*

Théorème 6.13 *Sur un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. D'après le lemme, par récurrence sur n, toute norme sur un e.v. E de dimension n est équivalente à sa norme d'e.v.n. produit : la norme ℓ^∞ $\|\sum x_ie_i\|:=\max(|x_1|,\dots,|x_n|)$, où les x_i sont les coordonnées dans une base arbitraire $(e_1,\dots,e_n)$ de E. □

Exercice. (12.6 TD6, ex. 2) Étendre la proposition 6.10 en montrant qu'une application linéaire de rang fini est continue si (et seulement si) son noyau est fermé.

Corollaire 6.14 *Si les E_i sont des e.v.n. de dimensions finies et F un e.v.n., toute application multilinéaire $f:E_1\times\ldots\times E_n\to F$ est continue.*

Démonstration. Par récurrence – en utilisant que $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)\simeq\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{n-1};\mathcal{L}(E_n,F))$ – il suffit de prouver le cas $n=1$; et ce cas se ramène, d'après le théorème, à celui où $E_1=\mathbb{R}^m$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Soit donc $f:\mathbb{R}^m\to F$ linéaire. Pour tout $x=(x_1,\dots,x_m)=\sum x_ie_i\in\mathbb{R}^m$, où les e_i sont les m vecteurs de la base canonique, $\|f(x)\|\le\sum|x_i|\|f(e_i)\|\le M\|x\|_\infty$ en posant $M=\sum\|f(e_i)\|$, donc f est continue (et $|\!|\!|f|\!|\!|\le M$). □

Corollaire 6.15 *Dans un e.v.n. de dimension finie, une partie est compacte si – et seulement si – elle est fermée et bornée (donc une partie est précompacte si – et seulement si – elle est bornée).*

Démonstration. Le théorème ci-dessus permet de se ramener au cas où l'e.v.n. est $(\mathbb{R}^n,\|\ \|_\infty)$, donc au théorème de Heine-Borel-Lebesgue (corollaire 4.14). □

Autrement dit : si un e.v.n. est de dimension finie alors il est localement compact. Un théorème de F. Riesz (annexe 3 : chap. 10) établit la réciproque, c'est-à-dire que dans *tout* e.v.n. de dimension infinie, il existe des suites bornées sans valeur d'adhérence. On en a vu un exemple (Exemple 4.10).

6.8 Complété d'un e.v.n.

Il existe, pour les e.v.n., un analogue du théorème 3.25 sur le complété d'un espace métrique :

Théorème 6.16 *Tout espace vectoriel normé (sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un sous-espace dense d'un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $\hat{E}$ le complété de E en tant qu'espace métrique. Les deux opérations d'espace vectoriel sur E, $+ : E \times E \to E$ et $\cdot : K \times E \to E$, sont lipschitziennes sur toute partie bornée donc (théorème 3.24) s'étendent continûment en des opérations sur $\hat{E}$. La norme s'étend de même, ou en posant simplement $\|\cdot\| = d(\cdot, 0)$. Par densité (en utilisant l'exercice 2.31 et la proposition 2.42), les équations sur $+, \cdot, \|\ \|$ qui font de l'espace métrique E un espace vectoriel normé sont encore vérifiées dans $\hat{E}$ pour ces prolongements. □

Remarque. De même que le complété d'un espace métrique, cet e.v.n. $\hat{E}$ complété de E est caractérisé (parmi les Banach contenant E) par une propriété universelle : toute application linéaire continue de E dans un Banach F s'étend de façon unique en une application linéaire continue de $\hat{E}$ dans F. On peut de plus remarquer que ce prolongement est de même norme.

6.9 Séries dans les e.v.n.

Les premières définitions et propriétés sont les mêmes que pour les séries de réels :

Définition 6.17 *On dit que la série de terme général $x_n \in E$*

- **converge** *(dans l'e.v.n. E) si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k \leq n} x_k$ converge. La limite $S \in E$ est alors appelée la somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$;*
- *diverge si elle ne converge pas ;*
- *vérifie le* **critère de converge absolue** *si la série réelle de terme général $\|x_n\|$ converge.*

Remarque. La convergence absolue s'appelle plutôt convergence normale lorsque l'e.v.n. E est un espace $B(X, F)$ des fonctions bornées d'un ensemble X dans un e.v.n. F – le plus souvent égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ – muni de la norme de la convergence uniforme.

Propriétés immédiates :

- une série $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n, y_n)$ à valeurs dans un e.v.n. produit $E \times F$ converge si et seulement si ses composantes $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (dans E) et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (dans F) convergent ; elle vérifie le critère de convergence absolue si et seulement si ses deux composantes le vérifient ;
- si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = V$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = U + \lambda V$;
- plus généralement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge et si u est linéaire continue (à valeurs dans un autre e.v.n.) alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(x_n) = u\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right).$$
En effet, $\|\sum_{k=0}^{n} u(x_k) - u(S)\| = \|u(\sum_{k=0}^{n} x_k - S)\| \leq \|\!|u|\!\| \|\sum_{k=0}^{n} x_k - S\|$;
- si la série converge alors $x_n \to 0$ (la réciproque est évidemment fausse, même dans $\mathbb{R}$) ;
- plus généralement, si la série converge alors la suite (S_n) est de Cauchy (autrement dit :
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m \geq n} \left\| \sum_{n<k\leq m} x_k \right\| = 0,$$
c'est le "critère de Cauchy usuel pour les séries") ;
- la réciproque est évidemment vraie **si E est complet** ;
- pour que (S_n) soit de Cauchy, il suffit que la série vérifie le critère de convergence absolue.

La caractérisation suivante est utile pour montrer que la complétude "passe au quotient" par un s.e.v. fermé (12.6 TD6, ex. 2).

Proposition 6.18 *Un e.v.n. E est complet si (et seulement si) dans E, toute série vérifiant le critère de convergence absolue est convergente.*

Démonstration. Le "seulement si" résulte de ce qui précède. Réciproquement, supposons E non complet et construisons dans E une série *non convergente et qui vérifie "pourtant" le critère de convergence absolue*. Soient x un vecteur qui n'appartient pas à E mais seulement à son complété $\hat{E}$ et $(x_n)_n$, une suite dans E telle que $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x - x_n\| \leq 2^{-n}$, alors la série de terme général $x_{n+1} - x_n$ est absolument convergente, mais sa somme $x \in \hat{E}$ n'appartient pas à E. $\square$

Rappelons que même dans $\mathbb{R}$, le distinguo entre série convergente et absolument convergente est crucial, ainsi que l'ordre de sommation :

Théorème 6.19 Théorème de réarrangement de Riemann. *Si une série de réels x_n est "semi-convergente", c'est-à-dire convergente mais non absolument, alors pour tout $\ell \in [-\infty, +\infty]$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \ell$.*

Démonstration. (Abrégée, et seulement dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$.) On commence par sommer (dans l'ordre) les $x_n \geq 0$ jusqu'à dépasser ℓ, puis les $x_n < 0$ jusqu'à redescendre en dessous de ℓ, puis (toujours dans l'ordre, à partir du premier $x_n \geq 0$ non encore utilisé) les $x_n \geq 0$, etc. Les deux réserves de termes positifs et négatifs sont inépuisables puisque les deux "sous-séries" correspondantes divergent. La suite $(S'_n)_n$ des sommes partielles des $x_{\sigma(n)}$ tend vers ℓ, car elle oscille entre deux sous-suites, $S'_{\varphi(n)} > \ell$ et $S'_{\psi(n)} < \ell$, qui tendent toutes deux vers ℓ (par exemple : $S'_{\varphi(n)} \to \ell$ parce que $S'_{\varphi(n)-1} \leq \ell < S'_{\varphi(n)}$ et $S'_{\varphi(n)} - S'_{\varphi(n)-1} = x_{\sigma(\varphi(n))} \to 0$). $\square$

Ce théorème suscite la définition et le corollaire ci-dessous :

Définition 6.20 *Une série à valeurs dans un e.v.n. est dite* **commutativement convergente** *si toutes ses permutées convergent.*

Remarque. On ne demande pas dans la définition que les sommes de la série et de toutes ses permutées soient égales, mais on verra plus loin que c'est automatique. On s'autorisera donc pour une telle série la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (au lieu de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$).

Exemple 6.21 Dans un Banach, toute série absolument convergente est commutativement convergente.

Corollaire 6.22 *Dans $\mathbb{R}^N$, une série est commutativement convergente (si et) seulement si elle est absolument convergente.*

Démonstration. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ une série dans $\mathbb{R}^N$, convergeant mais non absolument. L'une de ses N composantes réelles est alors semi-convergente : notons-la $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. En appliquant le théorème de réarrangement à $\ell = \pm\infty$, l'une de ses permutées, $\Sigma_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$, est divergente donc $\Sigma_{n=0}^{\infty} v_{\sigma(n)}$ aussi. $\square$

Cette réciproque ne s'étend pas aux Banach de dimension infinie :

Exemple 6.23 Soit (pour tout $n \in \mathbb{N}$) δ_n la suite qui vaut 1 au rang n et 0 ailleurs, vue comme un élément de ℓ^2. La série de terme général $\delta_n/(n+1)$ converge commutativement (vers l'élément $(1, 1/2, 1/3, \ldots)$ de ℓ^2) mais pas absolument.

Cette réciproque est même (comme la compacité des fermés bornés) caractéristique de la dimension finie. En effet, dans *tout* Banach E de dimension infinie, il existe des séries comme dans l'exemple ci-dessus. Plus précisément, le théorème de Dvoretzky-Rogers montre que pour *tous* réels $a_n \geq 0$ dont la série des carrés converge, il existe dans E une série commutativement convergente $\sum_n x_n$ avec $\|x_n\| = a_n$. Le critère de convergence absolue est donc "trop exigeant" en dimension infinie.

Définition 6.24 *On dit qu'une série de terme général x_n vérifie le* **critère de Cauchy commutatif** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de $\mathbb{N}$ telle que pour toute partie finie K de $\mathbb{N}$ disjointe de J_ε, $\left\|\sum_{k\in K} x_k\right\| < \varepsilon$.*

Dans ce cas, la série vérifie évidemment le critère de Cauchy usuel et (puisque le critère commutatif ne dépend pas de l'ordre) toutes ses permutées aussi. La réciproque est vraie mais nous n'en aurons pas besoin car nous ne nous intéresserons qu'au cas particulier suivant, utilisé pour $p = 2$ dans le prochain chapitre (le cas $p = 1$ correspond à la convergence absolue) :

Exemple 6.25 (Généralisation l'exemple précédent). Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs tels que pour un certain réel $p > 0$, on ait $\| \sum_{i\in J} x_i\|^p \leq \sum_{i\in J} \|x_i\|^p$ pour tout J fini inclus dans I. Supposons que l'élément $\sum_{i\in I} \|x_i\|^p$ de $[0, +\infty]$ (c'est-à-dire par définition : la borne supérieure des $\sum_{i\in J} \|x_i\|^p$ pour J fini inclus dans I) soit fini. Alors l'ensemble D des indices i pour lesquels $x_i \neq 0$ est au plus dénombrable (comme réunion, pour $n \in \mathbb{N}^*$, des ensembles (finis !) d'indices i pour lesquels $\|x_i\|^p \geq 1/n$) et la série correspondante vérifie le critère de Cauchy commutatif.

Proposition 6.26 *Dans un espace de Banach, toute série vérifiant le critère de Cauchy commutatif (et a fortiori toute série absolument convergente) est (commutativement) convergente et sa somme ne dépend pas de l'ordre des termes.*

Démonstration. Il reste à montrer que la somme ne dépend pas de l'ordre. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Notons S_n les sommes partielles de $S = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ et S'_n celles de $S' = \sum_{j=0}^{\infty} x_{\sigma(j)}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq J_\varepsilon \cup \sigma^{-1}(J_\varepsilon)$, posons

$$K_1 = \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{0, \ldots, n\} \text{ et } K_2 = \{0, \ldots, n\} \setminus \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}.$$

Alors,

$$\|S'_n - S_n\| = \left\|\sum_{k\in K_1} x_k - \sum_{k\in K_2} x_k\right\| \leq \left\|\sum_{k\in K_1} x_k\right\| + \left\|\sum_{k\in K_2} x_k\right\| < 2\varepsilon,$$

car J_ε est à la fois inclus dans $\{0, \ldots, n\}$ donc disjoint de K_1 et inclus dans $\{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$ donc disjoint de K_2. Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|S' - S\| \leq 2\varepsilon,$$

donc les deux sommes sont égales. □

Exercice. Déduire de la proposition 6.26 que dans un e.v.n. non nécessairement complet, si une série converge et vérifie le critère de Cauchy commutatif, alors toutes ses permutées convergent (vers la même somme).

Exercice. Montrer que si une série vérifie le critère de Cauchy commutatif alors toutes ses "sous-séries" vérifient le critère de Cauchy usuel (pour info : la réciproque est vraie mais du même ordre de difficulté que celle, évoquée plus haut, qui met en jeu les séries permutées au lieu des sous-séries). Retrouver ainsi que dans $\mathbb{R}$, une telle série est absolument convergente.

6.10 Algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes continus de E

On a déjà utilisé le mot "algèbre" (à propos du théorème de Stone-Weierstrass) pour $C(X)$, l'e.v.n. des applications continues d'un compact X dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.27 *Une algèbre (sous-entendu ici : associative et sur $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel A muni d'une seconde loi interne $\times$ bilinéaire et associative. Elle est dite unifère si $\times$ possède un élément neutre, et normée si de plus A est un e.v.n. tel que $\forall a, b \in A, \|a \times b\| \leq \|a\|\|b\|$.*

Une algèbre (associative) $(A, +, \cdot, \times)$ est donc à la fois un espace vectoriel $(A, +, \cdot)$ et un anneau $(A, +, \times)$, tel que $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$.

Corollaire 6.28 *L'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes continus de E est une algèbre normée unifère. Si E est complet alors $\mathcal{L}(E)$ aussi.*

Démonstration. La première affirmation est immédiate. La seconde est un corollaire de la proposition 6.6. □

Proposition 6.29 *Dans une algèbre de Banach unifère A, pour tout u tel que $\|u\| < 1$, la série de terme général u^n est absolument convergente et sa somme est inverse de $1_A - u$.*

Démonstration. La première affirmation est immédiate. La seconde – dans laquelle u^0 désigne 1_A – résulte du passage à la limite (par continuité du produit) dans les égalités $(1_A - u) \sum_{k \leq n} u^k = \left(\sum_{k \leq n} u^k\right)(1_A - u) = 1_A - u^{n+1}$. □

Remarque. La même technique s'applique à toute série entière, comme exp.

Corollaire 6.30 *Dans une algèbre de Banach unifère A, le groupe des inversibles $A^\times$ est ouvert.*

Si E est un espace de Banach, le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est donc ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.
Démonstration. Soit $a \in A^\times$. Montrons que pour h de norme assez petite, $a + h$ est inversible ou ce qui revient au même, son produit par a^{-1} l'est. Pour que $1_A + a^{-1}h$ soit inversible, il suffit que la norme de $-a^{-1}h$ soit strictement inférieure à 1, or cette norme est majorée par $\|a^{-1}\|\|h\|$. Il suffit donc que $\|h\| < 1/\|a^{-1}\|$. □

Chapitre 7

Espaces de Hilbert

7.1 Définitions

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 7.1 *Une* **forme sesquilinéaire** *sur un K-e.v. E est une application $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to K$ qui est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la seconde, i.e. $\langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle x, z\rangle$.*
Une **forme hermitienne** *est une telle forme $\langle\ ,\ \rangle$ vérifiant de plus $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, donc*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle).$$

On dit que deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** *pour une forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$, et l'on écrit $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$.*
Une forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$ est dite
- **positive** *si $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geq 0$ – on pose alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$,*
- **définie** *si $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$,*
- **non dégénérée** *si $(\forall y \in E, x \perp y) \Rightarrow x = 0$.*

Un **espace préhilbertien** *est un K-e.v. muni d'un* **produit scalaire***, c'est-à-dire d'une forme hermitienne définie positive.*

Remarques.
- Si $K = \mathbb{R}$, une forme hermitienne est simplement une forme bilinéaire symétrique.
- Toute forme définie est évidemment non dégénérée (si un vecteur x est orthogonal à tout l'espace alors il est orthogonal à lui-même, ce qui, si la forme est définie, entraîne $x = 0$). La réciproque est fausse en général (on en verra bientôt des exemples avec les matrices) mais vraie pour une forme positive (proposition 7.2).
- Tout préhilbertien complexe peut être considéré comme un préhilbertien réel (pour la même norme), en prenant comme produit scalaire réel :

  $$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle).$$

  De plus, le produit scalaire complexe $\langle\ ,\ \rangle$ peut être reconstitué à partir du produit scalaire réel $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$:

  $$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\langle x, \mathrm{i}y\rangle_{\mathbb{R}},$$

  puisque $\mathrm{Re}(\langle x, \mathrm{i}y\rangle) = \mathrm{Re}(-\mathrm{i}\langle x, y\rangle) = \mathrm{Im}(\langle x, y\rangle)$.

Exemples.
- Les espaces suivants sont préhilbertiens (et même hilbertiens, cf. définition 7.12) :

– les espaces euclidiens comme $\mathbb{R}^n$ ou hermitiens comme $\mathbb{C}^n$, munis de la forme canonique

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\ ;$$

– l'espace $\ell^2(K)$ des suites réelles ou complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$ en posant

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$$

(la convergence – absolue – de cette série est garantie par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous, appliquée d'abord aux sommes finies) ;

– généralisant les deux exemples précédents, les espaces $\mathrm{L}^2(\mu, K)$ de fonctions mesurables, à valeurs dans K, et dont le carré du module est μ-intégrable (plus précisément : les classes d'égalité presque partout de telles fonctions, faute de quoi la forme est hermitienne positive mais pas définie), en posant

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\mathrm{d}\mu.$$

– Généralisant le premier exemple, à toute matrice réelle symétrique M de taille n correspond (bijectivement) une forme hermitienne sur $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i M_{i,j} y_j = x^{\mathrm{T}} M y$$

(en identifiant les vecteurs aux matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique). Or il existe D réelle diagonale et P réelle orthogonale telles que $M = PDP^{-1}$, d'où

$$\langle x, y\rangle = x^{\mathrm{T}} PDP^{\mathrm{T}} y = u^{\mathrm{T}} D v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i v_i$$

($v = P^{\mathrm{T}} y$ et $u = P^{\mathrm{T}} x$ sont les coordonnées de x et y dans une autre base et les λ_i sont les valeurs propres de M). Par conséquent, cette forme est :

– **non dégénérée** lorsque le seul $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall u \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i v_i = 0$ est $v = 0$, c'est-à-dire lorsque les λ_i sont tous $\neq 0$ (autrement dit lorsque M est inversible) ;
– **définie** lorsque les λ_i sont tous > 0 ou tous < 0 ;
– **positive** lorsque les λ_i sont tous ≥ 0.

(On a les mêmes caractérisations pour une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$, associée à une matrice complexe hermitienne, $M = UDU^{-1}$ avec D diagonale *réelle* et U complexe unitaire.)

Proposition 7.2 Inégalité de Bunyakovsky-Cauchy-Schwarz. *Pour toute forme hermitienne positive* $\langle\ ,\ \rangle$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Si cette forme est non dégénérée, elle est donc définie, et l'on a alors égalité (si et) seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.

– Si $\|y\| \neq 0$, soit $\lambda = t\langle x, y\rangle$ avec $t = 1/\|y\|^2$. Alors,

$$\begin{aligned}\|x - \lambda y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2t|\langle x, y\rangle|^2 + t^2|\langle x, y\rangle|^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2/\|y\|^2\end{aligned}$$

donc $\|x\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2/\|y\|^2 \geq 0$, ce qui est (à réécriture près) l'inégalité voulue, et l'égalité a lieu si et seulement si $\|x - \lambda y\| = 0$.

– Si $\|y\| = 0$, soit de nouveau $\lambda = t\langle x, y\rangle$ mais avec cette fois t réel quelconque. Le début du même calcul donne
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \|x\|^2 - 2t|\langle x, y\rangle|^2 \geq 0$$
donc $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui, dans ce cas aussi, est l'inégalité voulue.

D'après cette inégalité, $\|y\| = 0 \Rightarrow \forall x \in E\ \langle x, y\rangle = 0$, donc toute forme hermitienne *positive* non dégénérée est définie. De plus, pour une telle forme, si $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ alors, d'après les deux cas ci-dessus, ou bien $x - \lambda y = 0$ pour un certain $\lambda \in K$, ou bien $y = 0$: dans les deux cas, x et y sont colinéaires. $\square$

Corollaire 7.3 *Lorsqu'une application $\|\ \|$ est définie à partir d'une forme hermitienne positive $\langle\ ,\ \rangle$ par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, elle vérifie* **l'inégalité de Minkowski**
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
donc c'est une semi-norme, et même une norme si $\langle\ ,\ \rangle$ est définie.

Démonstration. On développe $\|x + y\|^2$, puis on utilise l'inégalité $\mathrm{Re}(\lambda) \leq |\lambda|$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

Corollaire 7.4 *Soit $E \neq \{0\}$ un préhilbert. Pour tout $a \in E$, la forme K-linéaire $\langle\ , a\rangle$ est continue de norme $\|a\|$ et la forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ est continue de norme* 1.

Démonstration. Le cas $a = 0$ étant immédiat, supposons $a \neq 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $\langle\ , a\rangle$ est continue de norme $\leq \|a\|$ et $\langle\ ,\ \rangle$ est continue de norme ≤ 1. La norme de $\langle\ , a\rangle$ est en fait égale à $\|a\|$ et même atteinte, puisque pour le vecteur unitaire $x = a/\|a\|$ on a $\langle x, a\rangle = \|a\|$. De même, la norme de $\langle\ ,\ \rangle$ est égale à 1 et atteinte, puisque $\langle x, x\rangle = 1$. $\square$

7.2 Identités remarquables

En utilisant uniquement le fait que $\langle\ ,\ \rangle$ est hermitienne et la définition $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$, on vérifie que dans tout espace préhilbertien, on a les identités suivantes :

– **Identités de polarisation**
  – si $K = \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$;
  – si $K = \mathbb{C}$, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \left\|x + \mathrm{i}^k y\right\|^2$ [1].
– **Identité du parallélogramme** (la somme des carrés des deux diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses quatre côtés) :
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
– **Identité de la médiane** (dans un triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$ où I est le milieu de BC), équivalente à celle du parallélogramme puisqu'elle s'écrit
$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2.$$

Les identités de polarisation expriment la fonction produit scalaire à l'aide de la fonction norme. Par conséquent, lorsqu'une norme est préhibertienne, c'est-à-dire lorsqu'elle se déduit par la formule $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$ d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, ce produit scalaire est unique. En outre :

1. On peut le vérifier directement, ou le déduire de $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\langle x, \mathrm{i}y\rangle_{\mathbb{R}}$ et de $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.

Corollaire 7.5 *Une application linéaire entre espaces préhilbertiens préserve le produit scalaire dès qu'elle préserve la norme.*

L'identité du parallélogramme (ou celle de la médiane) caractérise les normes préhilbertiennes. C'est le théorème de Fréchet, von Neumann et Pascual Jordan – à ne pas confondre avec le mathématicien plus connu Camille Jordan) :

Théorème 7.6 *Une norme est préhilbertienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.*

(Dans le cas réel, il existe des conditions suffisantes plus faibles.)
Démonstration. Soit $\| \ \|$ une norme vérifiant l'identité du parallélogramme.

– Dans le cas réel, posons

$$\forall x, y \in E \quad \langle x, y\rangle := \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

Clairement, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ et $\langle \ , \ \rangle$ est symétrique. Il reste à montrer qu'elle est linéaire par rapport (par exemple) à la seconde variable.
Pour tous vecteurs x, y et z, on a :
– $\langle x, 0\rangle = 0$;
– $\langle x, y+z\rangle = 2\langle x/2, y\rangle + 2\langle x/2, z\rangle$ car

$$\begin{aligned}
2\langle x/2, y\rangle + 2\langle x/2, z\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x/2+y\|^2 - \|x/2-y\|^2 + \|x/2+z\|^2 - \|x/2-z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x/2+y\|^2 + \|x/2+z\|^2 - \|x/2-y\|^2 - \|x/2-z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 + \|y-z\|^2 - \|x-y-z\|^2 - \|y-z\|^2\right)\\
&\text{(d'après l'identité du parallélogramme)}\\
&= \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2\right)\\
&= \langle x, y+z\rangle \ ;
\end{aligned}$$

– $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ (d'après les deux points précédents).
On en déduit facilement que $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est $\mathbb{Q}$-linéaire donc (par continuité) $\mathbb{R}$-linéaire.

– Dans le cas complexe, posons

$$\forall x, y \in E \quad \langle x, y\rangle := \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\langle x, \mathrm{i}y\rangle_{\mathbb{R}} \text{ avec } \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} := \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

D'après le cas réel, il reste juste à montrer que

$$\forall x, y \in E \quad \langle \mathrm{i}x, y\rangle = \mathrm{i}\langle x, y\rangle \text{ et } \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle},$$

c'est-à-dire (en isolant parties réelles et imaginaires et en tenant compte du fait que $\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{R}}$ est symétrique) que

$$\langle \mathrm{i}x, y\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x, \mathrm{i}y\rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \langle \mathrm{i}x, \mathrm{i}y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}.$$

La première identité se déduit de la seconde par changement de variable, et cette dernière résulte du corollaire 7.5, appliqué à $\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{R}}$ et à l'application $\mathbb{R}$-linéaire $x \mapsto \mathrm{i}x$. □

Définition 7.7 *Dans un espace préhilbertien E, l'orthogonal $A^\perp$ d'une partie A de E est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous ceux de A.*

Proposition 7.8 *$A^\perp$ est un s.e.v. fermé et $A^\perp = \overline{\mathrm{vect} A}^{\perp}$.*

Démonstration. $A^\perp$ est l'intersection de la famille (indexée par $a \in A$) des noyaux des formes linéaires continues $x \mapsto \langle x, a\rangle$. Ce sont des s.e.v. fermés donc leur intersection aussi.
Puisque $A \subset \overline{\mathrm{vect} A}$, $A^\perp \supset \overline{\mathrm{vect} A}^{\perp}$. Réciproquement, dès qu'un vecteur est orthogonal à A, il est orthogonal à $\overline{\mathrm{vect} A}$, par bilinéarité et continuité du produit scalaire. □

Proposition 7.9 Identité de Pythagore *(généralisée) : si $x_1, \dots, x_n$ sont orthogonaux deux à deux, alors $\| \sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.*

Corollaire 7.10 *Soient F un s.e.v. de E et $x \in E$.*
- *Un élément y de F est un* **projeté** *de x sur F (i.e. vérifie $d(x,y) = d(x,F)$) si et seulement si $x - y \perp F$.*
- *Si un tel y existe alors il est unique et vérifie : $\|y\| \leq \|x\|$, avec égalité si et seulement si $y = x$ (c'est-à-dire si $x \in F$).*

Démonstration.

Si : si $y \in F$ est tel que $x - y \perp F$ alors, d'après le théorème de Pythagore, $\forall z \in F, d(x,z) \geq d(x,y)$, donc $d(x,F) = d(x,y)$.

Seulement si : soit $y \in F$ vérifiant $d(x,F) = d(x,y)$, montrons que $x - y \perp F$.
- Supposons d'abord $K = \mathbb{R}$. $\forall z \in F$ $\|(x-y)+z\| \geq \|x-y\|$ donc (en élevant au carré puis en développant et simplifiant) :
$$\forall z \in F \quad 2\langle x-y, z\rangle + \|z\|^2 \geq 0.$$
En posant $z = ru$ avec $r > 0$ et en faisant (après simplification) $r \to 0^+$, on en déduit que pour tout $u \in F$, $\langle x-y, u\rangle \geq 0$ et (puisque $-u$ appartient alors aussi à F) $\langle x-y, -u\rangle \geq 0$, c'est-à-dire
$$\forall u \in F \quad \langle x-y, u\rangle = 0.$$
On a donc bien $x - y \perp F$.
- Dans le cas $K = \mathbb{C}$, tout ce qui vient d'être dit s'applique au produit sacalaire à valeurs réelles $\mathrm{Re}(\langle\ ,\ \rangle)$. On a donc, pour tout $u \in F$, $\mathrm{Re}(\langle x-y, u\rangle) = 0$ et (puisque $-\mathrm{i}u$ appartient alors aussi à F) $\mathrm{Im}(\langle x-y, u\rangle) = \mathrm{Re}(\langle x-y, -\mathrm{i}u\rangle) = 0$ donc le nombre complexe $\langle x-y, u\rangle$ est nul, et l'on conclut de même.

Unicité : si deux vecteurs y_1, y_2 de F sont tels que $x - y_k \perp F$ alors leur différence est orthogonale à F, en particulier à elle-même, donc elle est nulle.

Inégalité et égalité : Par Pythagore, $\|x\|^2 = \|y-x\|^2 + \|y\|^2$. □

Exemple 7.11 Si F est un s.e.v. de dimension finie n, un tel projeté existe : il suffit de choisir une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de F et de poser
$$y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i.$$
En effet, ce vecteur appartient à F et en calculant $\langle x-y, e_j\rangle$ on trouve que $x - y$ est orthogonal à tous les e_j donc à F. Remarquons de plus que $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2$.

Remarque. On va bientôt montrer que plus généralement, si F est complet, un tel projeté existe. Il existe un théorème plus général de projection (12.6 TD6, ex. 3), où l'on suppose que la partie complète F est seulement convexe, au lieu d'être un sous-espace vectoriel. L'existence d'un projeté y se déduit dans ce cas du théorème 3.21 des fermés emboîtés (en prenant des intersections par F de boules fermées de centre x et en utilisant l'identité du parallélogramme pour montrer que le diamètre de ces intersections tend vers 0) ; son unicité se démontre en adaptant la technique ci-dessus.

7.3 Complété d'un espace préhilbertien

Définition 7.12 *Un* **espace de Hilbert** *est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée à son produit scalaire.*

De même que le complété d'un espace métrique E hérite naturellement d'une structure d'espace de Banach si E est un e.v.n., il hérite d'une structure supplémentaire d'espace de Hilbert si E est un préhilbert :

Proposition 7.13 *Tout espace préhilbertien est un sous-espace dense d'un espace de Hilbert.*

Démonstration. Diverses méthodes sont possibles, parmi lesquelles :

- de même qu'on avait étendu à $\hat{E}$ les lois d'espace vectoriel de E, étendre continûment à l'e.v.n. $\hat{E}$ le produit scalaire sur E (qui est $\mathbb{R}$-bilinéaire continu, donc lipschitzien sur toute partie bornée). Par densité, ce prolongement est encore sur $\hat{E}$ un produit scalaire dont dérive la norme ;
- définir une application de $\hat{E} \times \hat{E}$ dans K à partir de la norme sur $\hat{E}$, par l'identité de polarisation, puis conclure de même par densité ;
- sans même expliciter un produit scalaire sur $\hat{E}$, arguer qu'il en existe par le théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan, puisque (par densité) la norme sur $\hat{E}$ vérifie l'identité du parallélogramme. □

7.4 Bessel-Parseval et conséquences

Soit E un espace préhilbertien.

Définition 7.14 *Une* **famille orthonormale** *de E est une famille de vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme* 1*) et orthogonaux deux à deux.*
Une **base hilbertienne** *de E est une famille orthonormale totale c'est-à-dire dont le s.e.v. engendré est dense dans E.*

Attention : toute famille orthonormale est évidemment libre mais dans un espace de Hilbert de dimension infinie, une base hilbertienne n'est jamais une base au sens de l'algèbre linéaire car elle n'est "génératrice" qu'en un sens différent.

Théorème 7.15 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval. *Dans un espace préhilbertien E, soient $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale et F l'adhérence du s.e.v. qu'elle engendre.*

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $x \in F$.

En outre, si $x \in F$ ou si F est complet (en particulier si E l'est), x possède un (unique) projeté sur F :

$$p_F(x) = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Si $x \in F$ on a donc $x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i$, et les $\langle x, e_i\rangle$ sont alors appelés les **coefficients de Fourier** de x, relativement à $(e_i)_{i\in I}$.
Démonstration. D'après l'exemple 7.11 (et par définition d'une somme infinie de réels positifs comme la borne supérieure des sommes finies) :

$$\forall J \text{ fini } \subset I, \ \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \text{ donc } \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Soient H le complété de E et G l'adhérence de F dans H. D'après l'exemple 6.25 et la proposition 6.26, la série suivante définit un élément y de G :

$$y = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

et $x - y$ est orthogonal à tous les e_i donc à G. Par conséquent, $y = p_G(x)$.
Le réel $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|y\|^2$ est égal à $\|x\|^2$ si et seulement si $x \in G$, autrement dit (puisque $x \in E$) si $x \in G \cap E$, ou encore : si $x \in F$ (car G a été défini comme l'adhérence de F dans H donc (cf. exercice 2.11) $G \cap E$ est l'adhérence de F dans E, c'est-à-dire F lui-même).
Si F est complet (c'est-à-dire égal à G) alors $y = p_F(x)$. C'est bien sûr aussi le cas si $x \in F$. □

Corollaire 7.16 *Si F est un s.e.v. complet de E, l'application* **projection orthogonale** $p_F : E \to F$ *est bien définie. Elle est linéaire et continue (de norme 1 si $F \neq \{0\}$). On a*

$$\ker p_F = F^\perp \quad \text{et} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration. $F \cap F^\perp = \{0\}$ et d'après l'existence ci-dessus de $p_F(x)$ (pour F complet) et sa caractérisation (corollaire 7.10) $E = F + F^\perp$. Donc $E = F \oplus F^\perp$. Le reste en découle. □
Remarque. Joram Lindenstrauss et Lior Tzafriri ont démontré (1971) qu'un Banach dans lequel tout s.e.v. fermé possède un supplémentaire fermé est toujours *topologiquement* isomorphe à un Hilbert. On savait depuis Shizuo Kakutani (1939) qu'un Banach où tout s.e.v. fermé est l'image d'un projecteur de norme 1 est *isométriquement* isomorphe à un Hilbert.

Dans E, le biorthogonal de tout s.e.v. contient l'adhérence de ce s.e.v., et l'orthogonal de tout s.e.v. dense est nul. Lorsque E est complet, on peut préciser :

Corollaire 7.17 *Dans tout espace de Hilbert H, le biorthogonal d'un s.e.v. est réduit à son adhérence :*

$$(G^\perp)^\perp = \overline{G}.$$

En particulier, un s.e.v. est dense dans H si (et seulement si) son orthogonal est nul.

Démonstration. Pour tout s.e.v. G d'un espace préhilbertien E, on a $(G^\perp)^\perp \supset \overline{G}$ (puisque $(G^\perp)^\perp$ est fermé – cf. proposition 7.8 – et contient évidemment G) et si G est dense alors (cf. encore proposition 7.8) $G^\perp = \overline{G}^\perp = E^\perp = \{0\}$.
Si G est un s.e.v. d'un espace de Hilbert H, les deux s.e.v. $\overline{G}$ et $(G^\perp)^\perp$ sont de plus supplémentaires d'un même espace, $G^\perp$ (en appliquant le corollaire précédent à $F = \overline{G}$ et à $F = G^\perp$). Comme l'un est inclus dans l'autre, ils sont égaux, donc si $G^\perp = \{0\}$ alors $\overline{G} = \{0\}^\perp = H$. □

D'après le corollaire 7.4, pour tout vecteur y d'un préhilbert, la forme linéaire $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue, de norme $\|y\|$. Le théorème suivant dit que si le préhilbert est un Hilbert, toute forme linéaire continue s'obtient ainsi.

Corollaire 7.18 Théorème de représentation de F. Riesz. *L'injection canonique (semi-linéaire et isométrique) d'un espace de Hilbert H dans son dual topologique*

$$H \to H', y \mapsto \langle\ , y \rangle \quad \textit{est surjective.}$$

Démonstration. Soit $u \in H'$, cherchons un $y \in H$ tel que $u = \langle\ , y \rangle$. Si $u = 0$, il suffit de choisir $y = 0$. Supposons donc $u \neq 0$. Alors $\ker u$ est un hyperplan fermé donc (cf. corollaire 7.16) son orthogonal est une droite supplémentaire. Soit b un vecteur de cette droite tel que $u(b) = 1$. Les deux formes u et $\langle\ , b/\|b\|^2 \rangle$ ont même noyau et même valeur en b donc elles sont égales. □

Théorème 7.19 *Tout espace préhilbertien séparable possède une base hilbertienne.*

(On verra au § suivant un théorème analogue en remplaçant l'hypothèse "séparable" par "complet", autrement dit : tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne.)

Démonstration. D'une suite dense dans E on peut extraire une base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du s.e.v. (dense) qu'elle engendre. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons F_n le s.e.v. engendré par $x_1, \ldots, x_n$ (en particulier $F_0 = \{0\}$). Par le procédé de Gram-Schmidt, on va construire par récurrence une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout n, $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormale de F_n : ainsi, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sera une base hilbertienne de E. La construction de chaque e_n à partir des e_k précédents se fait en posant $y_n = \sum_{1\le k<n}\langle x_n, e_k\rangle e_k$ (c'est le projeté orthogonal de x_n sur F_{n-1}, cf. début de la preuve du théorème de Bessel-Parseval ci-dessus) puis en choisissant e_n unitaire et colinéaire au vecteur (non nul) $x_n - y_n$. $\square$

Corollaire 7.20 *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à ℓ^2.*

Sa "dimension hilbertienne" est donc card($\mathbb{N}$), alors que sa dimension algébrique est bien plus grande (cf. TD1 : c'est card($\mathbb{R}$)). D'ailleurs, le théorème de Baire (au programme du Master) permet de montrer qu'un espace de Banach n'est jamais de dimension algébrique dénombrable.

7.5 Dimension hilbertienne

(Hors programme)

On a construit, pour tout espace de Hilbert (ou même seulement préhilbertien) séparable, une base hilbertienne au plus dénombrable. La plupart des espaces de Hilbert de l'analyse fonctionnelle sont de ce type (exemples : 12.6 TD6, ex. 5). Étudions quand même le cas non séparable. Dans ce cas, et seulement pour un espace de Hilbert, pour démontrer qu'il possède des bases hilbertiennes et définir sa dimension hilbertienne, l'idée (non constructive, cette fois) est la même que, dans un espace vectoriel sans base finie, pour démontrer qu'il possède des bases (algébriques) et qu'elles ont toutes même cardinal. Dans le cadre algébrique, on utilisait qu'une partie libre est maximale (c'est-à-dire non strictement incluse dans une autre partie libre) si et seulement s'il n'existe pas de vecteur qu'on puisse lui ajouter en préservant sa liberté (donc si elle est génératrice). L'analogue hilbertien est qu'une partie orthonormale B est maximale (pour l'inclusion, parmi les parties orthonormales) si et seulement si $B^\perp = \{0\}$.

Théorème 7.21 *Dans tout espace préhilbertien, il existe des parties orthonormales maximales, et elles ont toutes même cardinal.*

Démonstration.

Existence. D'après la version "faible" du lemme de Zorn (cf. chapitre 8), il suffit de vérifier que lorsqu'un ensemble de parties orthonormales de E est totalement ordonné par inclusion, la réunion de ces parties est encore orthonormale (y compris lorsque cet ensemble totalement ordonné est vide, donc lorsque cette réunion est $\varnothing$).

Unicité du cardinal. Soient B une partie orthonormale maximale et A une partie orthonormale quelconque, montrons que card$(A) \le$ card(B). Si B est finie c'est immédiat (car B est alors une base de E). Supposons donc B infinie.

- Pour tout $b \in B$, $\sum_{a\in A} |\langle b, a\rangle|^2$ est fini (majoré par $\|b\|^2$ d'après l'inégalité de Bessel) donc l'ensemble de ses termes non nuls est au plus dénombrable, ce qui s'écrit, en notant

$$A(b) := \{a \in A \mid a \not\perp b\} \quad : \quad \mathrm{card}(A(b)) \le \mathrm{card}(\mathbb{N}).$$

– Par maximalité de B, $B^{\perp} = \{0\}$ donc $\forall a \in A \quad a \notin B^{\perp}$, autrement dit :

$$A \subset \bigcup_{b \in B} A(b).$$

On déduit de ces deux points que $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N} \times B) = \mathrm{card}(B)$ (la dernière égalité vient de l'hypothèse que B est infini : cf. lemme 7.23 ci-dessous). $\square$

Dans un espace préhilbertien, toute base hilbertienne B est orthonormale maximale (cf. preuve du corollaire 7.17, avec $G = \mathrm{vect}(B)$) mais la réciproque est fausse (il existe même un espace de Hilbert H et un sous-espace préhilbertien dense E dont les parties orthonormales maximales sont de cardinal strictement plus petit que celles de H donc ne sont pas totales). Elle est vraie cependant dans un espace de Hilbert :

Proposition 7.22 *Dans un espace de Hilbert, une partie est orthonormale maximale (si et) seulement si c'est une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit B une partie orthonormale maximale d'un Hilbert, alors $(\mathrm{vect}(B))^{\perp} = \{0\}$ donc (corollaire 7.17) B est totale. $\square$

Cette proposition, jointe au théorème ci-dessus, garantit l'existence de bases hilbertiennes pour un espace de Hilbert H et permet d'étendre le résultat obtenu au § précédent pour les Hilbert séparables : on définit la dimension hilbertienne de H comme le cardinal commun à toutes ses bases hilbertiennes, et les espaces de Hilbert sont alors classifiés à isomorphisme isométrique près par leur dimension hilbertienne, de même que les espaces vectoriels sont classifiés par leur dimension algébrique.

Voici, pour finir, le lemme utilisé dans le théorème ci-dessus.

Lemme 7.23 *Tout ensemble infini B est équipotent à $\mathbb{N} \times B$.*

Démonstration. On considère l'ensemble des couples (X, f) où X est une partie de B et f une bijection de X dans $\mathbb{N} \times X$. On le munit d'un ordre partiel : $(X, f) \leq (Y, g)$ si $X \subset Y$ et g est un prolongement de f. Lorsqu'un ensemble de tels couples est totalement ordonné (par la restriction de l'ordre partiel), sa réunion est encore un couple de cette forme (y compris lorsque cet ensemble de parties est vide, donc lorsque cette réunion est le couple ($\varnothing$, application vide)). D'après le lemme de Zorn, il existe donc un (X, f) maximal. Pour conclure, il suffit de montrer que $B \setminus X$ est fini (comme B est infini, cela prouvera que B est équipotent à X et (donc) $\mathbb{N} \times B$ à $\mathbb{N} \times X$, donc que B et $\mathbb{N} \times B$ sont équipotents). Si $B \setminus X$ était infini, il contiendrait un ensemble dénombrable D. En juxtaposant la bijection f de de X dans $\mathbb{N} \times X$ et une bijection arbitraire de D dans $\mathbb{N} \times D$ (cf. proposition 1.1), on construirait un majorant strict de (X, f), ce qui contredirait sa maximalité. $\square$

(Plus généralement, tout ensemble infini est équipotent à son carré : Krivine p. 32.)

Troisième partie

Annexes

Chapitre 8

Appendice 1 : axiome du choix et lemme de Zorn

Nous avons suivi la coutume d'utiliser l'axiome du choix de façon implicite mais d'expliciter l'usage plus rare du lemme de Zorn. Dans cet appendice, on va montrer que les deux sont équivalents. Le sens "difficile" (axiome du choix $\Rightarrow$ Zorn) a bien d'autres démonstrations. Certaines passent par le théorème de Zermelo, dont il ne sera pas question ici. Celle présentée ci-dessous fait intervenir comme préalable un théorème de point fixe qui – fait remarquable – se démontre sans l'axiome du choix, grâce à la notion de bon ordre.

Définition 8.1 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble muni d'un ordre (partiel).*

- *Un* **majorant** [1] *d'une partie A de E est un élément e de E tel que $\forall a \in A \quad a \leq e$.*
- *La* **borne supérieure** *de A est (s'il existe) le plus petit majorant de A.*
- *Un* **élément maximal** *de $(E, \leq)$ est un élément sans majorant strict.*
- *Une* **chaîne** *de $(E, \leq)$ est une partie de E sur laquelle l'ordre $\leq$ est total.*
- *On dit que $(E, \leq)$ est :*
  - *un* **ordre inductif** *si (dans E) toute chaîne admet un majorant* [2] *;*
  - *un ordre strictement inductif si toute chaîne admet une borne supérieure* [3] *;*
  - *un* **bon ordre** [4] *si toute partie non vide* [5] *contient un plus petit élément.*
- *L'***axiome du choix** *est l'énoncé : pour tout ensemble X, il existe une application $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ telle que (pour toute partie non vide Y de X) $f(Y) \in Y$.*
- *Le* **lemme de Zorn** *est l'énoncé : pour qu'un ordre partiel possède (au moins) un élément maximal, il suffit que :*
  - *(version usuelle) cet ordre soit inductif;*
  - *(version "faible* [6]*") cet ordre soit strictement inductif;*
  - *(version "forte* [7]*") : toute partie bien ordonnée soit majorée.*

Proposition 8.2 *La version "faible" du lemme de Zorn implique l'axiome du choix.*

Démonstration. Soit E l'ensemble de tous les graphes de fonctions de choix partiellement définies sur $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, c'est-à-dire de toutes les parties G de $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}) \times X$ vérifiant : pour toute partie non vide Y de X, il existe au plus un $y \in X$ tel que $(Y, y) \in G$, et s'il en existe un, ce y appartient

1. Même définition pour un majorant strict, en remplaçant $\leq$ par $<$.
2. Puisque $\varnothing$ est une chaîne, cette condition implique que E est non vide.
3. Tout ordre strictement inductif est donc inductif.
4. On dit aussi "E est bien ordonné" (par $\leq$).
5. En particulier toute paire, donc tout bon ordre est total.
6. Cette version suffit dans la plupart des utilisations. Elle est d'ailleurs en fait équivalente à la version usuelle.
7. Cette version est aussi équivalente à la version usuelle, de même que la version "semi-forte" : *il suffit que toute partie bien ordonnée possède une borne supérieure.*

à Y. Cet ensemble E, ordonné par inclusion, est strictement inductif. D'après le lemme de Zorn (version faible), il existe donc dans E un élément maximal G. La fonction de choix correspondante est alors définie sur $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ tout entier. $\square$

Théorème 8.3 Point fixe dans un ensemble ordonné.
Soient $(P, \leq)$ un ensemble ordonné dans lequel toute partie bien ordonnée possède une borne supérieure et $g : P \to P$ une application expansive, c'est-à-dire vérifiant $\forall x \in P \quad x \leq g(x)$.
Alors g possède au moins un point fixe.

Démonstration. Appelons "g-ensemble" toute partie C de P bien ordonnée et telle que

$$\forall x \in C \quad x = \sup\{g(y) \mid y \in C \text{ et } y < x\}.$$

(En particulier, $\varnothing$ est un g-ensemble.)

Si C et D sont deux g-ensembles, l'un est un segment initial de l'autre. En effet, soit I la réunion des segments initiaux à la fois de C et de D et montrons par l'absurde que I est égal à C ou D : sinon, I aurait un plus petit majorant strict dans C, soit c, et un plus petit majorant strict dans D, soit d, et l'élément

$$c = \sup\{g(y) \mid y \in C \text{ et } y < c\} = \sup\{g(y) \mid y \in I\} = \sup\{g(y) \mid y \in D \text{ et } y < d\} = d \notin I$$

pourrait alors être ajouté à I pour former un segment initial commun à C et D, contredisant la maximalité de I.

On en déduit que la réunion M de tous les g-ensembles est encore un g-ensemble. En particulier, M est bien ordonné et g est croissante sur M, donc $\{g(y) \mid y \in M\}$ est bien ordonné. Soit z sa borne supérieure. Alors $M \cup \{z\}$ est un g-ensemble donc (par maximalité de M) $z \in M$ donc $g(z) \in \{g(y) \mid y \in M\}$ donc (par définition de z) $g(z) \leq z$ donc (par expansivité de g) $g(z) = z$. $\square$

Proposition 8.4 *L'axiome du choix implique la version "forte" du lemme de Zorn.*

Démonstration. Supposons que toute partie bien ordonnée de $(E, \leq)$ est majorée. Considérons l'ensemble P des parties bien ordonnées et ordonnons-le par inclusion. Définissons (à l'aide d'une fonction de choix) une application $g : P \to P$ par : si C a des majorants stricts, soit x l'un d'eux et $g(C) = C \cup \{x\}$, sinon, soit $g(C) = C$. Alors les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées donc g possède un point fixe, c'est-à-dire que E possède une partie bien ordonnée C sans majorant strict. Par hypothèse sur $(E, \leq)$, C a cependant un majorant, qui est alors maximal dans E. $\square$

Chapitre 9

Appendice 2 : théorème de Hahn-Banach

Dans un K-espace vectoriel E, un hyperplan affine est une partie de la forme $g^{-1}(\{a\})$ où g est une forme linéaire non nulle et $a \in K$. Si E est un e.v.n., cet hyperplan est fermé si et seulement si g est continue. Dans un espace de Hilbert H, les hyperplans affines fermés sont donc (d'après le théorème de représentation de Riesz, corollaire 7.18) les parties de la forme $\{z \in H \mid \langle z, n\rangle = a\}$ où n est un vecteur non nul et $a \in K$.

Dans un espace de Hilbert réel H, il est donc facile de séparer, par un tel hyperplan, un convexe fermé C d'un point $x \notin C$: soit y le projeté de x sur C (cf. 12.6 TD6, ex. 3) alors,

$$\forall z \in C \quad \langle z - y, x - y\rangle \leq 0$$

tandis que

$$\langle x - y, x - y\rangle = \delta^2 > 0$$

donc C et x sont strictement de part et d'autre de l'hyperplan $\{z \in H \mid \langle z - y, x - y\rangle = \delta^2/2\} = \{z \in H \mid \langle z, n\rangle = a\}$ avec $n = x - y$ et $a = \langle y, n\rangle + \frac{\delta^2}{2}$.

Le théorème de Hahn-Banach généralise considérablement ce procédé : on se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E quelconque (au lieu d'un espace de Hilbert) et même, au lieu d'une norme, on prend seulement une fonction convexe, c'est-à-dire une application $p : E \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y).$$

Théorème 9.1 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et f une forme linéaire sur F, majorée par $p_{|F}$. Alors il existe (au moins) une forme linéaire sur E, prolongeant f et majorée par p.*

En appliquant ce théorème à $p =$ un multiple de $\| \; \|$, on en déduit que toute forme linéaire continue sur un s.e.v. d'un e.v.n. E se prolonge en une forme linéaire continue sur E, de même norme. En l'appliquant à $p =$ la jauge d'un convexe, on en déduit divers résultats de séparation des convexes – comme celui ci-dessus – dans n'importe quel e.v.n.

Démonstration. Considérons l'ensemble des couples (M, g) constitués d'un s.e.v. M contenant F et d'une forme linéaire g sur M prolongeant f et majorée par $p_{|M}$, et ordonnons-le en posant : $(M, g) \leq (N, h) \Leftrightarrow M \subset N$ et h est un prolongement de g. Cet ordre partiel est strictement inductif (cf. définition 8.1) (exercice : pourquoi ?) donc possède, d'après le lemme de Zorn, au moins un élément maximal (M, g). Il reste à montrer que $M = E$. Pour cela, montrons que sinon, (M, g) aurait un majorant strict (N, h) avec $N = M + \mathbb{R}v$, où v est un vecteur arbitraire de $E \setminus M$.
On prolonge g par une forme linéaire h sur N en posant :

$$\forall x \in M \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad h(x + tv) := g(x) + t\alpha,$$

mais il faut montrer qu'on peut choisir $\alpha \in \mathbb{R}$ de telle façon que $h \leq p$ non seulement sur M mais sur N, c'est-à-dire que

$$\forall x \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}^* \quad g(x) + t\alpha \leq p(x + tv).$$

ou encore (en séparant les cas $t > 0$ et $t < 0$) :

$$\forall x \in M \quad \forall t > 0 \quad g(x) + t\alpha \leq p(x + tv) \text{ et } g(x) - t\alpha \leq p(x - tv),$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in M \quad \forall t > 0 \quad a_{x,t} \leq \alpha \leq b_{x,t} \text{ avec } a_{x,t} := \frac{g(x) - p(x - tv)}{t} \text{ et } b_{x,t} := \frac{p(x + tv) - g(x)}{t}.$$

La condition d'existence d'un tel α est donc :

$$\sup_{x \in M, t > 0} a_{x,t} \leq \inf_{x \in M, t > 0} b_{x,t}$$

ou encore :

$$\forall x, y \in M \quad \forall s, t > 0 \quad a_{x,s} \leq b_{y,t}.$$

Cette condition est bien réalisée, d'après la convexité de p, la majoration de g par $p_{|M}$ et la linéarité de g :

$$\begin{gathered}
\frac{g(x) - p(x - sv)}{s} \leq \frac{p(y + tv) - g(y)}{t} \quad \text{car} \\
tg(x) + sg(y) \leq tp(x - sv) + sp(y + tv) \quad \text{car} \\
\frac{tp(x - sv) + sp(y + tv)}{s + t} \geq p\left(\frac{t(x - sv) + s(y + tv)}{s + t}\right) \\
= p\left(\frac{tx + sy}{s + t}\right) \geq g\left(\frac{tx + sy}{s + t}\right) = \frac{tg(x) + sg(y)}{s + t}. \quad \square
\end{gathered}$$

Chapitre 10

Appendice 3 : théorème de compacité de Riesz

(à ne pas confondre avec le théorème de représentation du même Riesz, cf. corollaire 7.18).

Théorème 10.1 *Un e.v.n. est de dimension finie si (et seulement si) ses boules fermées sont compactes.*

On a déjà vu le “seulement si” ($\Rightarrow$). Le principe pour $\Leftarrow$ est le même que dans la preuve de la proposition 4.11 : dans un e.v.n. de dimension infinie, on va construire une suite $(x_n)_n$ de vecteurs unitaires à distance $\geq \frac{1}{2}$ les uns des autres donc sans sous-suite de Cauchy, ce qui prouvera que les boules fermées ne sont pas compactes (ni même précompactes). Il suffit, pour construire (par récurrence) le $(n+1)$-ième terme d'une telle suite, d'appliquer le lemme suivant à $r = \frac{1}{2}$ et $F = \mathrm{vect}(x_0, \ldots, x_n)$ (qui est fermé car de dimension finie).

Lemme 10.2 *Soient E un e.v.n., $F \subsetneq E$ un s.e.v. fermé propre et $r \in]0,1[$. Il existe un vecteur unitaire $x \in E$ tel que $d(x, F) \geq r$.*

Démonstration. Soit $y \in E \setminus F$. Comme F est fermé, $\delta := d(y, F) > 0$ donc (par hypothèse sur r) $\frac{\delta}{r} > \delta$. Par définition de $d(y, F)$, il existe alors $f_0 \in F$ tel que

$$\|y - f_0\| \leq \frac{\delta}{r}.$$

En posant

$$x := \frac{y - f_0}{\|y - f_0\|},$$

on a bien :

$$\forall f \in F \quad \|x - f\| = \frac{\|y - (f_0 + \|y - f_0\| f)\|}{\|y - f_0\|} \geq \frac{\delta}{\|y - f_0\|} \geq r. \quad \square$$

Plus généralement, tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique (notion définie dans la proposition 6.1) séparé et localement compact est de dimension finie.

Chapitre 11

Annales

11.1 Examen de janvier 2016

Énoncé (3 heures, sans document)

Exercice 1 Soit $(\ell^\infty, \| \|_\infty)$ l'espace de Banach des suites bornées de nombres complexes et $(\ell^1, \| \|_1)$ celui des suites sommables. On notera e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième, qui vaut 1 ; autrement dit : $e_n = (\delta_k^n)_k$.

1) Soit c_0 l'espace des suites complexes de limite nulle. Montrer que $(c_0, \| \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.
2) Pour tout $y \in \ell^1$ et tout $x \in c_0$, on pose $\Lambda_y(x) := \sum_{n=0}^\infty y_n x_n$. Montrer que Λ_y est une forme linéaire continue sur c_0 et que $|||\Lambda_y||| \le \|y\|_1$. Que dire de l'application $y \mapsto \Lambda_y$?
3) Justifier l'identité $x = \lim_N \sum_{n=0}^N x_n e_n$ pour tout $x := (x_n)_n \in c_0$.
4) Soit λ une forme linéaire continue sur c_0 et $y := (y_n)_n$ où $y_n := \lambda(e_n)$. Montrer que $y \in \ell^1$ et que $\|y\|_1 \le |||\lambda|||$. Montrer que $\lambda = \Lambda_y$.
5) Que peut-on dire du dual topologique de $(c_0, \| \|_\infty)$?

Exercice 2 Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note B_E la boule unité fermée de E et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F normé par

$$|||T||| := \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F.$$

On dit que $T : E \to F$ est un *opérateur compact* si T est linéaire et si $T(B_E)$ est relativement compact dans F. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

1) Montrer que $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_c(E,F)$.
2) On suppose dans cette question que $(F, \| \|_F)$ est complet.
   i) Soient $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $K \in \mathcal{K}(E,F)$ tels que $|||T - K||| < \frac{\varepsilon}{2}$. Montrer que $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.
   ii) Montrer que $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{L}_c(E,F)$.
   iii) Montrer que si $T = \lim_n T_n$ et si $T_n(E)$ est de dimension finie pour tout n alors $T \in \mathcal{K}(E,F)$.
3) Dorénavant, $(F, \| \|_F)$ est remplacé par un espace de Hilbert $(H, \| \|)$.
   i) Soit $K \in \mathcal{K}(E,H)$. Montrer que pour tout entier $n \ge 1$, il existe dans H un sous-espace vectoriel M_n de dimension finie tel que $d(K(x), M_n) \le \frac{1}{n}$ pour tout $x \in B_E$.
   ii) Justifier l'existence d'une suite $(P_n)_n$ d'applications linéaires continues de H dans H telles que $P_n(H) = M_n$ et $|||K - P_n \circ K||| \le \frac{1}{n}$.

Corrigé

Exercice 1

1) c_0 est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach ℓ^∞. Il suffit donc de montrer qu'il est fermé. Supposons qu'une suite d'éléments $x_n = (x_k^n)_k \in c_0$ converge dans ℓ^∞ vers un élement $x = (x_k)_k$ et montrons qu'alors, $x \in c_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $\forall n \geq N \quad \|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon$, en particulier (pour $n = N$) $\forall k \in \mathbb{N} \quad |x_k^N - x_k| \leq \varepsilon$. Et puisque $x_N \in c_0$, il existe K tel que $\forall k \geq K \quad |x_k^N| \leq \varepsilon$, d'où (par inégalité triangulaire) : $\forall k \geq K \quad |x_k| \leq 2\varepsilon$, ce qui conclut.

2) $\Lambda_y : c_0 \to \mathbb{C}$ est clairement linéaire. Il suffit donc de vérifier que $\forall x \in c_0 \quad |\Lambda_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty$:

$$\left|\sum_n y_n x_n\right| \leq \sum_n |y_n|\,|x_n| \leq \sum_n |y_n| \sup_m |x_m| = \|y\|_1 \|x\|_\infty.$$

On peut remarquer que l'application $\Lambda : \ell^1 \to (c_0)', y \mapsto \Lambda_y$ (linéaire continue, de norme ≤ 1) est injective car de noyau nul. En effet, $y_n = \Lambda_y(e_n)$ donc $\Lambda_y = 0 \Rightarrow y = 0$.

3) Pour tout $x \in c_0$, la suite $x - \sum_{n=0}^N x_n e_n$ est nulle jusqu'au rang N, puis coïncide avec x. Sa norme sup est donc égale à $\sup_{n>N} |x_n|$, qui tend vers 0 quand $N \to \infty$.

4) Pour tout indice n, soit $u_n \in \mathbb{C}$ tel que $|y_n| = u_n y_n$ et $|u_n| = 1$ (si $y_n = 0$, on peut choisir par exemple $u_n = 1$). Ainsi, $\sum_{n=0}^N |y_n| = \lambda\left(\sum_{n=0}^N u_n e_n\right)$, or $\left\|\sum_{n=0}^N u_n e_n\right\|_\infty = \sup_{n\leq N} |u_n| = 1$, donc $\sum_{n=0}^N |y_n| \leq \|\lambda\|$, et cela pour tout $N \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que $\sum_{n=0}^\infty |y_n| \leq \|\lambda\|$, c'est-à-dire que $y \in \ell^1$ et $\|y\|_1 \leq \|\lambda\|$. Pour tout $x \in c_0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, $\lambda\left(\sum_{n\leq N} x_n e_n\right) = \sum_{n\leq N} x_n y_n = \Lambda_y\left(\sum_{n\leq N} x_n e_n\right)$. D'après la question précédente et par continuité de λ et Λ_y, on en déduit : $\lambda(x) = \Lambda_y(x)$. On a donc $\lambda = \Lambda_y$.

5) D'après la question précédente, l'application $\Lambda : \ell^1 \to (c_0)'$ (linéaire continue, de norme ≤ 1 et injective) est surjective et $\|\Lambda^{-1}\| \leq 1$. C'est donc un isomorphisme (isométrique) d'e.v.n.

Exercice 2

1) Remarquons d'abord que tout opérateur compact $T : E \to F$ est continu, puisque $T(B_E)$ est relativement compact donc borné. Si T est un opérateur compact alors λT aussi pour tout scalaire λ, car $\overline{\lambda T(B_E)} = \lambda \overline{T(B_E)}$ est compact, comme image d'un compact par un homéomorphisme (si $\lambda \neq 0$) ou par une application constante (si $\lambda = 0$). Si T_1 et T_2 sont deux opérateurs compacts alors $T_1 + T_2$ aussi car il envoie B_E dans $\overline{T_1(B_E)} + \overline{T_2(B_E)}$ qui est compact puisque dans F (séparé), la somme de deux compacts est compacte, comme image d'un compact (produit de deux compacts) par une application continue $(+ : E \times E \to F)$.

2) i) $K(B_E)$ est précompact donc recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$, et $T(B_E)$ est alors recouvert par les boules de mêmes centres et de rayon ε.

   ii) Si une suite d'opérateurs compacts $T_n : E \to F$ converge dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ vers un élément T alors, d'après la sous-question précédente, $T(B_E)$ est précompact. Comme F est complet, $T(B_E)$ est donc relativement compact, si bien que $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

   iii) Si (pour tout n) $T_n \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est de rang fini alors $T_n(B_E)$ est relativement compact (comme partie bornée d'un e.v.n. de dimension finie) donc T_n est un opérateur compact. Si de plus $T_n \to T$ alors, d'après la sous-question précédente, $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

3) i) $K(B_E)$ est précompact donc recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{n}$. Soit M_n le s.e.v. de F engendré par leurs centres. Alors, pour tout $x \in B_E$, $d(K(x), M_n) \leq \frac{1}{n}$.

   ii) Notons P_n la projection orthogonale sur M_n. Alors, $P_n(H) = M_n$ et pour tout $x \in B_E$, $\|K(x) - P_n K(x)\| \leq d(K(x), M_n) \leq \frac{1}{n}$ donc $\|K - P_n \circ K\| \leq \frac{1}{n}$.

11.2 Partiel de novembre 2015

Énoncé (14h–17h, sans document)

Exercice 1 Espace de Sierpiński
Soient $X = \{0,1\}$ et $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, X\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
   Pour cette topologie :
2. quelles sont les suites dans X qui convergent vers 0 ?
3. quelles sont celles qui convergent vers 1 ?
4. dans un espace topologique arbitraire, quelles sont les parties dont la fonction indicatrice, à valeurs dans X, est continue ?

Exercice 2 Continuité et adhérences Soient X et Y deux espaces topologiques quelconques, $f : X \to Y$ une application continue et A, B deux parties de X ayant même adhérence. Montrer que $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.

Exercice 3 Distance
Montrer que dans un espace métrique, tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 4 Suites de Cauchy
Dans un espace métrique (X, d), soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $(d(x, a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. On note $f(x)$ sa limite.
2. Montrer que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue.
3. Calculer $\inf_{x\in X} f(x)$. Quand cette limite est-elle atteinte ?
4. Déduire de ce qui précède que si X n'est pas complet, il existe une application $g : X \to \mathbb{R}$ continue et non bornée.

Problème : séparabilité et cardinaux

1. Soient X un espace séparé et à bases dénombrables de voisinages et D une partie dense dans X.
   (a) Montrer (en signalant où chaque hypothèse est utilisée) que le cardinal de X est inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble des suites à valeurs dans D.
   (b) En déduire que si X est de plus séparable, son cardinal est inférieur ou égal au cardinal de $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $[0..n]$ l'ensemble des entiers naturels de 0 à n, $\mathcal{P}([0..n])$ l'ensemble de ses parties et F_n l'ensemble des applications de $\mathcal{P}([0..n])$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $F := \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est dénombrable.
3. Soit $(X_A)_{A\in\mathbf{R}}$ une famille d'espaces séparables non vides indexée par $\mathbf{R} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$, et $X = \prod_{A\in\mathbf{R}} X_A$ muni de la topologie produit (dont une base est constituée des "ouverts élémentaires" : les $\prod_{A\in\mathbf{R}} U_A$, où chaque U_A est un ouvert du X_A correspondant, et est égal à X_A sauf pour un ensemble fini d'indices A). On va montrer que X est séparable.
   On fixe dans chaque X_A une partie dense $D_A = \{d_{A,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$.
   On considère l'ensemble dénombrable F de la question 2. À chaque application $f \in F$, définie sur $\mathcal{P}([0..n])$ pour un certain n, on associe le point $y_f := (d_{A,f(A\cap[0..n])})_{A\in\mathbf{R}}$ de X. On note D l'ensemble de tous ces y_f.

(a) Montrer que tout ouvert élémentaire non vide $\prod_{A\in\mathbf{R}} U_A$ rencontre D.
(Indication : en notant $A_1, \ldots, A_r$ les $A \in \mathbf{R}$ pour lesquels l'ouvert U_A n'est pas X_A tout entier, montrer qu'il existe $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ tels que $d_{A_i,k_i} \in U_{A_i}$, puis fixer un entier n suffisamment grand pour que les r parties finies $A_i \cap [0..n]$ soient distinctes et choisir un $f \in F_n$ convenable.)

(b) En déduire que X est séparable.

4. En utilisant les questions 1 et 3, construire au moins un espace séparé, séparable et non métrisable (c'est-à-dire dont la topologie ne peut pas être définie à partir d'une distance).

Corrigé (barème sur 24)

Exercice 1 Espace de Sierpiński (4 pts)

1. $\mathcal{T}$ contient $\varnothing$ et X et, puisqu'elle ne contient qu'une seule autre partie, elle est stable par intersections (en particulier par intersections finies) et par réunions. C'est donc une topologie sur X.
2. Toute suite dans X converge vers 0 puisque X est le seul voisinage de 0.
3. Une suite $(x_n)_n$ converge vers 1 si et seulement si $\{1\}$ (seul voisinage de 1 à part X) contient tous les x_n à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si la suite stationne à 1.
4. $\chi_A^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $\chi_A^{-1}(X) = Y$ sont toujours des ouverts de Y, donc χ_A est continue si et seulement si $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ est un ouvert de Y.

Exercice 2 Continuité et adhérences (2 pts) $f(\overline{A}) = f(\overline{B})$ (car $\overline{A} = \overline{B}$) et $f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$ (car f est continue) donc $f(A)$ est inclus dans le fermé $\overline{f(B)}$, donc $\overline{f(A)} \subset \overline{f(B)}$. Idem en intervertissant A et B, d'où l'égalité.

Exercice 3 Distance (2 pts) Soient F un fermé d'un espace métrique (E, d) et $f : E \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$ (continue). Alors $F = \overline{F} = f^{-1}(\{0\}) = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} f^{-1}(]-\infty, 1/n[)$, intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 4 Suites de Cauchy (5 pts)

1. La suite réelle $(d(x, a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy car $|d(x, a_p) - d(x, a_q)| \leq d(a_p, a_q)$. Par complétude de $\mathbb{R}$, elle est donc convergente.
2. f est continue et même 1-lipschitzienne, par passage à la limite dans les inégalités $|d(x, a_n) - d(y, a_n)| \leq d(x, y)$.
3. $\inf_{x\in X} f(x) = 0$ car $f(a_n) \to 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que
$$\forall m, n \geq N_\varepsilon \quad d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$$
donc (en faisant $m \to \infty$ pour n fixé) $\forall n \geq N_\varepsilon \quad f(a_n) \leq \varepsilon$.
Cette limite est atteinte s'il existe un $x \in X$ tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $a_n \to x$, autrement dit si la suite $(a_n)_n$ converge dans X.
4. Dans X non complet, soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy non convergente. L'application continue associée f a pour inf 0, non atteint. L'application $g = 1/f : X \to \mathbb{R}$ est donc bien définie et continue, mais non majorée.

Problème : séparabilité et cardinaux (4 + 1 + 3 + 3 = 11 pts)

1. (2 + 2)

(a) Soit S le sous-ensemble de $D^{\mathbb{N}}$ constitué des suites qui convergent dans X. Comme X est séparé, chacune de ces suites n'a qu'une limite. L'application

$$L : S \to X, (x_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

est donc bien définie. Comme X est à bases dénombrables de voisinages, l'image de l'application L est $\overline{D}$ tout entier. Comme D est dense, $\overline{D} = X$. Donc L est surjective. Ainsi,

$$\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(S) \leq \operatorname{card}(D^{\mathbb{N}}).$$

(b) Si X est de plus séparable, en appliquant ce qui précède à un D au plus dénombrable, on trouve $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. Par ailleurs, puisque $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ et que $\operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$,

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \leq \operatorname{card}((\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}) = \operatorname{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}).$$

2. (1 pt) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \mathbb{N}^{\mathcal{P}([0..n]}$ est dénombrable (comme produit fini non vide d'ensembles dénombrables) donc F est dénombrable (comme union dénombrable d'ensembles dénombrables).

3. (2 + 1)

   (a) Avec les notations de l'énoncé, l'existence de $k_1, \dots, k_r$ vient du fait que chaque U_A est un ouvert non vide du X_A correspondant, donc rencontre la partie dense D_A. Une fois n fixé comme indiqué, il existe au moins une application $f \in F_n$ telle que pour chaque i de 1 à r, $f(A_i \cap [0..n]) = k_i$. Le $y := y_f \in D$ associé à un tel f vérifie : pour i de 1 à r, $y_{A_i} = d_{A_i,k_i} \in U_{A_i}$ et pour tout $A \in \mathbf{R}$ différent de $A_1, \dots, A_r$, $y_A \in X_A = U_A$, donc $y \in U$.

   (b) La partie $D = \{y_f \mid f \in F\}$ est au plus dénombrable d'après la question 2, et est dense dans X d'après la question 3.a, donc X est séparable.

4. (3 pts) Prenons tous les X_A égaux à un même espace Y séparé, séparable et contenant au moins deux points (par exemple l'espace discret $\{0,1\}$, ou encore l'espace $\mathbb{R}$ ou le segment réel $[0,1]$, munis de leur topologie usuelle), et $X = \prod_{A\in\mathbf{R}} X_A = Y^{\mathbf{R}}$.
   D'après la question 3.b, X est séparable.
   X est de plus séparé car si x et y sont deux points distincts de ce produit, ils diffèrent sur au moins une composante, $x_{A_0} \neq y_{A_0}$, et comme Y est séparé, il contient deux ouverts disjoints U_{A_0}, V_{A_0} contenant respectivement x_{A_0} et y_{A_0}. En posant, pour tous les autres $A \in \mathbf{R}$, $U_A = V_A = Y$, on obtient deux ouverts disjoints $\prod_{A\in\mathbf{R}} U_A$ et $\prod_{A\in\mathbf{R}} V_A$ de X, contenant respectivement x et y.
   Enfin, comme Y a au moins deux points,

$$\operatorname{card}(X) \geq \operatorname{card}\left(\{0,1\}^{\mathbf{R}}\right) = \operatorname{card}\left(\mathcal{P}(\mathbf{R})\right) > \operatorname{card}(\mathbf{R}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$$

   donc d'après la question 1.b, X n'est pas à bases dénombrables de voisinages. Par conséquent, il n'est pas métrisable.

11.3 Devoir maison de décembre 2015

Énoncé

Un intérêt de $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$ est que c'est un espace complet. Il s'ensuit que la théorie des séries (numériques ou de fonctions) est beaucoup plus riche sur $\mathbb{R}$ que sur $\mathbb{Q}$. Mais compléter $\mathbb{Q}$

pour avoir $\mathbb{R}$ dépend d'une distance particulière. Grâce à des distances différentes, on peut obtenir d'autres espaces complets qui sont les corps des nombres p-adiques, notés $\mathbb{Q}_p$.

Première partie : valuations sur le corps $\mathbb{Q}$ et complétions

On se donne un nombre premier p et un réel $\alpha > 1$.

1. **Valuation p-adique.** On définit
$$v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$
par : $v_p(0) = +\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, $v_p(x)$ est l'unique entier (relatif) tel que
$x = p^{v_p(x)}\frac{a}{b}$ avec a et b entiers non divisibles par p.
Vérifier que :
– $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$;
– $v_p(x+y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.
2. **Valeur absolue p-adique.** On définit :
$$|\ |_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto |x|_p := \alpha^{-v_p(x)}.$$
Vérifier que :
– $|x|_p = 0 \iff x = 0$;
– $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$;
– $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ (donc $|-x|_p = |x|_p$).
3. **Distance p-adique.** En déduire que
$$d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+, (x, y) \mapsto d_p(x, y) := |y - x|_p$$
est une distance ultramétrique (cf. TD2, ex. 8).
4. Montrer que la distance d_p sur $\mathbb{Q}$ (qui dépend du choix initial d'un $\alpha > 1$) est uniformément équivalente à la distance d'_p associée de même à n'importe quel $\beta > 1$.
5. En déduire que le complété est indépendant de la valeur choisie pour α (plus précisément : qu'entre le complété pour d_p et celui pour d'_p, il existe une bijection, fixant tout rationnel, et uniformément continue dans les deux sens).
6. On note $\mathbb{Q}_p$ ce complété, en fixant désormais $\alpha = p$. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Q}_p$ une unique structure d'anneau avec addition et multiplication continues, prolongeant celle de $\mathbb{Q}$.
7. Définir de même des prolongements continus $v_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et $|\ |_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}^+$.
8. Montrer que l'anneau $\mathbb{Q}_p$ est un corps et que l'application $\mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{Q}_p^*, x \mapsto x^{-1}$ est continue.

Deuxième partie : les entiers p-adiques et leur développement de Hensel

On note $\mathbb{Z}_p$ le sous-anneau (contenant $\mathbb{Z}$) des éléments de valuation positive ou nulle, appelés les entiers p-adiques :
$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid v_p(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est complet.
2. Montrer que pour toute suite d'entiers $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i$ converge dans $\mathbb{Z}_p$.
3. Montrer que si les a_i sont compris entre 0 et $p-1$ et non tous nuls, alors $v_p(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i)$ est le plus petit indice i tel que $a_i \neq 0$.

4. Montrer que l'application

$$\{0,\dots,p-1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}_p, \quad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i$$

est injective.

5. Montrer qu'elle est également surjective (on pourra démontrer ou admettre que pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, il existe $a \in \{0,\dots,p-1\}$ tel que $|x-a|_p < 1$).

6. En déduire que :
   (a) $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$;
   (b) Tout élément de $\mathbb{Q}_p^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=r}^{+\infty} a_i p^i$ avec $r \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0,\dots,p-1\}$ et $a_r \neq 0$.
   (c) $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}_p$ ont même cardinal que $\mathbb{R}$.

7. Questions bonus :
   (a) Quelle est la caractéristique de $\mathbb{Q}_p$?
   (b) Quels sont les éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}_p$? Quels sont leurs antécédents par la bijection ci-dessus ?
   (c) En particulier, quels sont les antécédents de 1, -1, $\frac{1}{1-p}$, $\frac{1}{p-1}$?
   (d) Quel est le corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$?

Corrigé

Première partie : valuations sur le corps $\mathbb{Q}$ et complétions

1. Si x ou y est nul, les deux propriétés sont immédiates. Sinon, $x = p^r \frac{a}{b}$ et $y = p^s \frac{c}{d}$ avec a,b,c,d entiers non divisibles par p, donc :
   – $xy = p^{r+s}\ \frac{ac}{bd}$ donc $v_p(xy) = r+s = v_p(x)+v_p(y)$;
   – en supposant par exemple $r \leq s$: $x+y = p^r\ \frac{ad+p^{s-r}bc}{bd}$ donc $v_p(x+y) \geq r = \min(v_p(x),v_p(y))$.

2. $|x|_p = 0 \Leftrightarrow v_p(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$ et les deux autres propriétés résultent point par point de la question précédente. Le "donc $|-x|_p = |x|_p$" vient alors du fait que $|-x|_p$ et $|x|_p$ sont positifs et ont même carré.

3. $d_p(x,y) = d_p(y,x)$ car $|-z|_p = |z|_p$.
   $d_p(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $|z|_p = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
   $$\begin{aligned} d_p(x,z) = |(z-y)+(y-x)|_p &\leq \max(|z-y|_p, |y-x|_p) \\ &= \max(d_p(y,z), d_p(x,y)). \end{aligned}$$

4. $d'_p(x,y) = |y-x|'_p$ pour $|z|'_p := \beta^{-v_p(z)} = (|z|_p)^k$ avec $k = \frac{\ln\beta}{\ln\alpha} > 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{Q} \quad \big(d_p(x,y) < \eta \Rightarrow d'_p(x,y) < \varepsilon\big)$$

(il suffit de choisir $\eta \leq \varepsilon^{1/k}$), ce qui prouve que l'application identité, de $(\mathbb{Q}, d_p)$ dans $(\mathbb{Q}, d'_p)$, est uniformément continue.
De même, $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{Q}, d'_p) \to (\mathbb{Q}, d_p)$ est uniformément continue.

5. Notons (E,d) le complété pour d_p et (E',d') celui pour d'_p.
   L'application $(\mathbb{Q}, d_p) \to (E', d'), x \mapsto x$ est uniformément continue (comme composée, avec $(\mathbb{Q}, d'_p)$ comme espace intermédiaire) et est à valeurs dans un complet, donc elle s'étend (par densité de $\mathbb{Q}$ dans E) en une application continue $f : (E,d) \to (E',d')$.

f est uniformément continue non seulement sur $\mathbb{Q}$ mais sur E, par densité de $\mathbb{Q}$ et continuité sur E. On peut même expliciter :

$$\forall x, y \in E \quad \left(d(x,y) < \varepsilon^{1/k} \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon\right).$$

De même $(\mathbb{Q}, d'_p) \to (E, d), x \mapsto x$ s'étend en $g : (E', d') \to (E, d)$ uniformément continue.
La composée $g \circ f : E \to E$ est égale à l'identité sur une partie dense donc (par continuité) sur E tout entier. De même, $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}$.

6. $+$ et $\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_p$ sont Cauchy-continues ($+$ est 1-lipschitzienne et $\times$ est lipschitzienne sur toute partie bornée) donc s'étendent continûment de façon unique à $\widehat{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$. Par densité et continuité, les équations sur $+$ et $\times$ qui font de $(\mathbb{Q}, +, \times)$ un anneau (commutatif et unifère) sont vérifiées par ces prolongements.
7. $\forall x \in \mathbb{Q} \quad |x|_p = d_p(0, x)$ donc $| \; |_p$ s'étend (par la même formule) en une application continue $| \; |_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}^+$. De même pour $v_p(x) = -\frac{\ln(|x|_p)}{\ln(p)}$, qui se prolonge donc en une application continue v_p sur $\mathbb{Q}_p$, a priori à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ mais en fait $v_p(\mathbb{Q}_p) = v_p(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{v_p(\mathbb{Q})} = \overline{\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. (De plus, les propriétés de la question 1 sont encore vérifiées par ce prolongement.)
8. Puisque $d_p(x^{-1}, y^{-1}) = \left|\frac{x-y}{xy}\right|_p = \frac{1}{|x|_p|y|_p} d_p(y, x)$, l'application $x \mapsto x^{-1}$, de $\mathbb{Q}^*$ dans l'espace complet $\mathbb{Q}_p$, est lipschitzienne sur toute partie de $\mathbb{Q}$ de la forme $U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{Q} \mid |x|_p > \varepsilon\}$ avec $\varepsilon > 0$, donc s'étend continûment (de façon unique) à l'ouvert $V_\varepsilon := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p > \varepsilon\}$ de $\mathbb{Q}_p$ (car U_ε est dense dans V_ε). Par unicité, ces prolongements sont compatibles (c'est-à-dire que si $\varepsilon > \varepsilon'$ alors le prolongement à V_ε est restriction du prolongement à $V_{\varepsilon'}$), ce qui définit un prolongement I sur $\cup_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon = \mathbb{Q}_p^*$. Cette application I est continue sur $\mathbb{Q}_p^*$ car sa restriction à chaque ouvert V_ε l'est. On a $xI(x) = 1$ sur $\mathbb{Q}^*$ donc (par densité et continuité) sur $\mathbb{Q}_p^*$.

Deuxième partie : les entiers p-adiques et leur développement de Hensel

1. $\mathbb{Z}_p$ est complet car (par continuité de v_p) fermé dans le complet $\mathbb{Q}_p$.
2. La suite des sommes partielles est de Cauchy car pour $N \leq j \leq k$, $v_p\left(\sum_{j \leq i < k} a_i p^i\right) \geq j \geq N$ donc $|\sum_{j \leq i < k} a_i p^i|_p \leq p^{-N}$. Puisque $a_i p^i \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ et que $\mathbb{Z}_p$ est complet, la série converge dans $\mathbb{Z}_p$.
3. Si $a_0 = a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0$ et a_r non divisible par p alors, pour tout $k > r$, $v_p\left(\sum_{i<k} a_i p^i\right) = r$ donc (par continuité de v_p sur $\mathbb{Q}_p$) $v_p\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i\right) = r$.
4. Soient $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \neq (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\{0, \ldots, p-1\}$ et soit r le plus petit indice tel que $a_r \neq b_r$. Alors, $a_r - b_r$ n'est pas divisible par p donc, par le même raisonnement que ci-dessus, $v_p\left(\sum_{i=0}^{+\infty}(a_i - b_i)p^i\right) = r \neq +\infty$ donc $\sum_{i=0}^{+\infty}(a_i - b_i)p^i \neq 0$ donc $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i \neq \sum_{i=0}^{+\infty} b_i p^i$.
5. Soit $x_0 \in \mathbb{Z}_p$, il existe $a_0 \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $v_p(x_0 - a) > 0$ c'est-à-dire tel que $x_1 := \frac{x_0 - a_0}{p} \in \mathbb{Z}_p$, puis $a_1 \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que, de même, $x_2 := \frac{x_1 - a_1}{p} \in \mathbb{Z}_p$, etc. On construit ainsi par récurrence une suite d'entiers $a_n \in \{0, \ldots, p-1\}$ et une suite d'entiers p-adiques x_n tels que $x_0 - \sum_{i<n} a_i p^i = p^n x_n$. Alors, $\left|x_0 - \sum_{i<n} a_i p^i\right|_p \leq p^{-n}$ donc $x_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i$.
6. (a) $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ puisque tout élément de $\mathbb{Z}_p$ est somme d'une série d'entiers.
   (b) Un $x \in \mathbb{Q}_p^*$ s'écrit $p^r \sum_{i=r}^{+\infty} a_i p^{i-r}$ avec $r \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $a_r \neq 0$ si et seulement si : $r = v_p(x)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+r} p^j$ est l'écriture (via la bijection ci-dessus) de l'élément $p^{-r}x$ de $\mathbb{Z}_p$. Cela prouve à la fois l'existence et l'unicité demandées.
   (c) D'après les questions 4, 5 et 6b,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\left(\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}\right) &= \operatorname{card}(\mathbb{Z}_p) \\ &\leq \operatorname{card}(\mathbb{Q}_p) \leq \operatorname{card}\left(\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{Z}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{or}\quad \operatorname{card}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right) &\leq \operatorname{card}\left(\{0,\ldots,p-1\}^{\mathbb{N}}\right)\\
&\leq \operatorname{card}\left(\{0,\ldots,p-1\}^{\mathbb{Z}}\right)\\
&\leq \operatorname{card}\left(\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{Z}}\right)\\
&= \operatorname{card}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}\right) = \operatorname{card}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{card}(\mathbb{Z}_p) = \operatorname{card}(\mathbb{Q}_p) = \operatorname{card}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

7. (a) $\mathbb{Q}_p \supset \mathbb{Q}$ est de caractéristique nulle.
   (b) Puisque $v_p(1) = 0$ et $\forall x, y \in \mathbb{Q}_p \quad v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$, les inversibles, dans l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des éléments de valuation positive ou nulle, sont ceux de valuation nulle, c'est-à-dire les $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i$ avec $a_i \in \{0,\ldots,p-1\}$ et $a_0 \neq 0$.
   (c) $1 = 1p^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} 0p^i$,
   $-1 = \sum_{i=0}^{+\infty}(p-1)p^i$ (car $\sum_{0\leq i<n}(p-1)p^i = -1 + p^n$) donc
   $\frac{1}{1-p} = \frac{-1}{p-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i$ et
   $\frac{1}{p-1} = \frac{-1}{1-p} = 1 + \frac{p-2}{1-p} = (p-1) + \sum_{i=1}^{+\infty}(p-2)p^i$.
   (d) Le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ est $\mathbb{Q}_p$, puisque $\mathbb{Q}_p$ est un corps contenant $\mathbb{Z}_p$ et que tout élément de $\mathbb{Q}_p$ est quotient de deux éléments de $\mathbb{Z}_p$ (le dénominateur pouvant même être choisi égal à une puissance de p).

Complément : preuve du lemme admis dans la question II.5 :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_p \quad \exists a \in \{0,\ldots,p-1\} \quad v_p(x-a) > 0.$$

Si $v_p(x) > 0$, il suffit de prendre $a = 0$. Supposons donc $v_p(x) = 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_p$, il existe un rationnel y tel que $v_p(x-y) > 0$, ce qui implique $v_p(y) \geq \min(v_p(y-x), v_p(x)) = 0$, donc $y = \frac{b}{c}$ avec b, c entiers et c non divisible par p. Il existe alors un entier $a \in \{0,\ldots,p-1\}$ tel que $ca \equiv b \mod p$ donc tel que $v_p(y-a) = v_p(c(y-a)) = v_p(b-ca) > 0$, si bien que $v_p(x-a) \geq \min(v_p(x-y), v_p(y-a)) > 0$.

11.4 Devoir surveillé d'octobre 2015

Énoncé (seul le polycopié de cours est autorisé)

Exercice 1 Un espace métrique (X,d) est dit polonais s'il est complet et séparable.

1. Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces polonais. Montrer que l'espace produit $X_1 \times X_2$ muni de la distance $D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ est un espace polonais. Quelle est la topologie induite par D ?
2. Soit (X,d) un espace polonais et F une partie fermée de X. Montrer que (F,d) est polonais.
3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue. Montrer que U est homéomorphe à
$$\{(x, f(x));\ x \in U\}$$
muni de la topologie induite par la topologie produit.
4. En utilisant la fonction
$$\begin{array}{rcl} U := \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+, \\ x & \longmapsto & \frac{1}{|x|} \end{array}$$
déduire des questions précédentes qu'il existe une distance δ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ telle que $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \delta)$ est un espace polonais et la topologie induite par δ est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Exercice 2 Soit $(X_i, \mathcal{T}(X_i))_{i\in\mathbb{N}}$ une collection dénombrable d'espaces topologiques.

1. On note $X = \Pi_{i=1}^{+\infty} X_i$. Soit
$$\mathcal{B} = \{\Pi_{i\in\mathbb{N}} U_i ; U_i \in \mathcal{T}(X_i) \text{ et } U_i = X_i \text{ sauf pour un nombre fini de valeurs de } i\}.$$
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie $\mathcal{T}(X)$ sur X ($\mathcal{T}(X)$ est la *topologie produit* sur X).
2. Soit I un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \Pi_{i\in I} X_i \\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_i)_{i\in I} \end{array}$$
est continue.
3. Supposons que chaque X_i est séparé. Montrer que X l'est également.
4. Supposons que chaque X_i est séparable. Montrer que X l'est également.

Exercice 3 Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$ un sous-ensemble. Étant donné $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne, montrer qu'il existe une application $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ k-lipschitzienne telle que $h|_F = f$. On pourra considérer la quantité
$$\inf_{y\in F} (f(y) + L\, d(x, y))$$
pour un L convenable.

Exercice 4 Dans cet exercice, $\bar{B}(0, R)$ est la boule fermée de rayon R de $\mathbb{R}^2$, centrée à l'origine. On considère l'espace $X = \Pi_{N=1}^{+\infty} \bar{B}(0, N)$ muni de la topologie produit introduite dans l'exercice 2.

1. Soit $1 \leq N \leq N'$ deux entiers. Déduire de résultats de l'exercice 2 que la projection
$$\begin{array}{cccc} \Phi_{N,N'} : & X & \longrightarrow & \bar{B}(0, N) \times \bar{B}(0, N') \\ & (y_K)_{K\geq 1} & \longmapsto & (y_N, y_{N'}) \end{array}$$
est continue.
2. Soit $N \geq 1$ un entier. On note $p_N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \bar{B}(0, N)$ la projection sur $\bar{B}(0, N)$ définie par
$$p_N(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \bar{B}(0, N) \\ Nx/|x| & \text{sinon} \end{cases}$$
Vérifier que p_N est continue.
3. On considère le sous-ensemble de X :
$$Y = \big\{(y_N)_{N\in\mathbb{N}^*} \in X \,;\, \forall N, N' \in \mathbb{N}^* \,;\, N \leq N' \Rightarrow p_N(y_{N'}) = y_N\big\}.$$
Montrer en justifiant convenablement, que c'est une partie fermée de X (on pourra écrire Y comme une intersection de fermés).
4. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la suite $(p_N(x))_{N\in\mathbb{N}^*}$.
5. En déduire qu'il existe une injection continue $\phi : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow Y$.
6. À quoi est homéomorphe le complémentaire $Y \setminus \phi(\mathbb{R}^2)$?

Corrigé

Exercice 1

1. La distance $D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ est Lipschitz-équivalente (donc uniformément équivalente) à la distance usuelle sur l'ensemble produit, $d := \max(d_1, d_2)$ (car $d \leq D \leq \sqrt{2}d$). L'espace métrique $(X_1 \times X_2, d)$ (produit de deux complets, cf. cours) est complet, donc (X, D) aussi. La topologie induite par D est la même que celle induite par d, qui (cf. cours) est la topologie produit.
Pour cette topologie produit, l'adhérence du produit cartésien $A \times B$ d'une partie de X_1 par une partie de X_2 est (cf. cours) le produit $\overline{A} \times \overline{B}$ de leurs adhérences respectives, en particulier, le produit d'une partie dense dans X_1 par une partie dense dans X_2 est dense dans $X_1 \times X_2$. Si ces deux parties sont au plus dénombrables, leur produit aussi. Donc $(X_1 \times X_2, D)$ est séparable.
2. F est fermé dans X donc (F, d) est complet. La séparabilité n'est pas héréditaire (i.e. : un sous-espace d'un séparable n'est pas toujours séparable) mais la propriété (plus forte) d'être à base dénombrable d'ouverts l'est, or (cf. cours) pour un espace métrisable, les deux sont équivalentes. Donc F est séparable.
3. L'application $F : U \to U \times \mathbb{R}^+, x \mapsto (x, f(x))$ est continue (puisque ses deux composantes le sont) donc sa corestriction aussi (qu'on notera encore F), surjective, de U dans $F(U) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$. Elle est évidemment injective, et $F^{-1} : F(U) \to U$ est continue, comme restriction de la projection $U \times \mathbb{R}^+ \to U, (x, y) \mapsto x$. Donc F est un homéomorphisme.
4. Soit $F : x \mapsto (x, 1/|x|)$ la bijection entre $U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:
$$F(U) = \{(x, 1/|x|) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|y = 1\}.$$
Pour la distance euclidienne D (comme pour d, cf. question 1), $\mathbb{R}^2$ est polonais et $F(U)$ est fermé (d'après sa seconde expression ci-dessus) donc polonais aussi (cf. question 2). Par conséquent, U est polonais pour la distance δ transportée sur U (par la bijection F) de la distance D sur $F(U)$ (et la topologie induite par δ sur U est la même que l'usuelle, puisque F est un homéomorphisme d'après la question 3).
$$\delta(u, v) = D(F(u), F(v)) = \sqrt{(u - v)^2 + (1/|u| - 1/|v|)^2}.$$

Exercice 2

1. Il s'agit (cf. cours), en définissant $\mathcal{T}(X)$ comme l'ensemble des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$, de vérifier les deux conditions suivantes : $X \in \mathcal{T}(X)$ et pour tous $U, V \in \mathcal{B}$, $U \cap V \in \mathcal{T}(X)$. On a bien $X \in \mathcal{T}(X)$ et même $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \in \mathcal{B}$. Soient $U = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$ et $V = \prod_{i \in \mathbb{N}} V_i \in \mathcal{B}$, alors $U \cap V = \prod_{i \in \mathbb{N}} (U_i \cap V_i)$ appartient à $\mathcal{T}(X)$ et même à $\mathcal{B}$, car $U_i \cap V_i = X_i$ sauf lorsque $U_i \subsetneq X_i$ ou $V_i \subsetneq X_i$, donc sauf pour un ensemble d'indices qui est fini (comme réunion de deux ensembles finis).
2. L'application $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (x_i)_{i \in I}$ est continue car chacune de ses composantes, $p_j : X \to X_j, (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto x_j$ (pour tout $j \in I$) l'est. En effet, pour tout ouvert U_j de X_j, l'image réciproque $p_j^{-1}(U_j)$ appartient à $\mathcal{T}(X)$ et même à $\mathcal{B}$ (c'est le produit de U_j par les $U_i := X_i$ pour $i \neq j$).
3. Soient $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$, distincts. Alors $x_j \neq x_j$ pour au moins un indice j. Comme X_j est séparé, il possède deux ouverts disjoints U_j, V_j tels que $x_j \in U_j$ et $y_j \in V_j$. En posant $U = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$ avec $U_i = X_i$ pour tout $i \neq j$, et en définissant V de même à partir de V_j, on sépare x et y par deux ouverts de X (et même deux éléments de $\mathcal{B}$) disjoints.
4. Si l'un des X_i est vide alors X aussi donc X est séparable. Supposons désormais que chaque X_i est non vide. Comme il est supposé séparable, il contient alors une partie dense au plus dénombrable et non vide, donc de la forme $A_i := \{a_{i,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Notons e_i l'un de ses éléments, par exemple $e_i := a_{i,0}$, et A le sous-ensemble de $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ constitué des $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (avec $x_i \in A_i$) pour lesquels $x_i = e_i$ sauf pour un ensemble fini d'indices i.

- A est au plus dénombrable car l'ensemble $S = \cup_{r\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^r$ des suites finies d'entiers naturels est dénombrable et l'on peut définir une surjection $S \to A$, en associant à tout $(n_0, \ldots, n_{r-1}) \in S$ l'élément x défini par $x_i = a_{i,n_i}$ si $i < r$ et $x_i = e_i$ si $i \geq r$.
- A est dense dans X car il rencontre tout ouvert non vide, puisqu'il rencontre ceux de $\mathcal{B}$. En effet, pour un tel ouvert $U = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \geq r\ U_i = X_i$ et $\forall i < r\ U_i$ est un ouvert non vide de X_i donc contient un $x_i \in A_i$, et l'élément de X constitué de ces x_i pour $i < r$ et des e_i pour $i \geq r$ appartient alors à $U \cap A$.

Donc X est séparable. (Pour une généralisation à un produit d'espaces séparables indexé par $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{N}$, cf. partiel novembre 2015.)

Exercice 3

Si $F = \varnothing$, on peut par exemple choisir f constante. Supposons désormais $F \neq \varnothing$.
Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f(y)+kd(x,y) \mid y \in F\}$ est alors non vide et minoré par $f(z)-kd(x,z)$ pour n'importe quel $z \in F$. Notons $h(x)$ sa borne inférieure.
Si $x \in F$ alors $h(x) \leq f(x) + kd(x,x)$ et (d'après la minoration ci-dessus, en choisissant $z = x$) $h(x) \geq f(x) - kd(x,x)$, donc $h(x) = f(x)$.
Pour tous $x, x' \in E$ et tout $y \in F$, $f(y) + kd(x,y) \leq f(y) + kd(x',y) + kd(x,x')$ donc $h(x) \leq h(x') + kd(x,x')$ et de même en intervertissant x et x', donc h est k-lipschitzienne.

Exercice 4

1. Si $N < N'$, $\Phi_{N,N'}$ est continue d'après la question 2 de l'exercice 2. Si $N = N'$, elle l'est aussi, par le même raisonnement.
2. $p_N(x) = f(\|x\|)x$ où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est l'application qui envoie t sur 1 si $t \leq N$ et sur N/t si $t \geq N$. Pour $t = N$, les deux définitions sont compatibles, donc f est continue donc p_N aussi.
3. Pour tous entiers $N' \geq N \geq 1$, les deux applications de X dans $\bar{B}(0,N)$ (séparé) $y \mapsto y_N$ et $y \mapsto p_N(y_{N'})$ sont continues donc l'ensemble $Y_{N,N'}$ des points où elles coïncident est un fermé de X. Donc $Y = \bigcap_{1\leq N\leq N'} Y_{N,N'}$ est fermé.
4. Soit $u = x/\|x\|$. Tant que $N \leq \|x\|$, $p_N(x) = Nu$ puis, pour tout $N \geq \|x\|$, $p_N(x) = x$.
5. L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to X, x \mapsto (p_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ est continue car ses composantes p_N le sont (ou plus en détail : pour tout ouvert élémentaire $U = \prod_{N<r} U_n \times \prod_{N\geq r} \bar{B}(0,N)$ de X, $\phi^{-1}(U) = \bigcap_{N<r} p_N^{-1}(U_N)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, comme intersection finie d'ouverts ; donc par réunion, l'image réciproque d'un ouvert quelconque de X est encore un ouvert de $\mathbb{R}^2$).
   Elle est à valeurs dans Y d'après la question 4 et sa corestriction, de $\mathbb{R}^2$ dans Y, encore notée ϕ, est donc continue.
   Elle est injective car si $\phi(x) = \phi(y)$ alors, pour un entier N assez grand (supérieur à $\|x\|$ et à $\|y\|$), $x = p_N(x) = p_N(y) = y$.
6. L'injection, du cercle unité S^1 (compact) dans X (séparé), qui à u associe $(Nu)_{N\in\mathbb{N}}$, est continue car ses composantes le sont. C'est donc un homémorphisme de S^1 sur son image $Y \setminus \phi(\mathbb{R}^2)$.

11.5 Examen de rattrapage de juin 2015

Énoncé (13 h 30 – 16 h 30, sans document)

Dans tout l'énoncé, ℓ^2 désigne l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable, muni de la distance associée à la norme $\|\ \|_2$, déduite du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\delta^{(n)}$ l'élément de ℓ^2 défini par : $\delta_n^{(n)} = 1$ et tous les autres $\delta_k^{(n)}$ sont nuls.

Exercice. **Topologie faible**

On appelle topologie faible sur ℓ^2 la topologie engendrée par toutes les images réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$ par les formes linéaires continues sur ℓ^2.

1. Montrer que les intersections finies de parties de la forme $U_{y,\lambda} := \{x \in \ell^2 \mid \langle y, x\rangle > \lambda\}$ (avec $y \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$) forment une base de cette topologie.
2. Montrer que cette topologie est séparée, mais moins fine que celle associée à $\| \|_2$.
3. On dit qu'une suite $(x^{(n)})_n$ d'éléments de ℓ^2 converge faiblement si elle converge pour la topologie faible. Montrer que $x^{(n)} \to x$ faiblement si et seulement si $\forall y \in \ell^2 \quad \langle y, x^{(n)}\rangle \to \langle y, x\rangle$.
4. En déduire que si $x^{(n)} \to x$ faiblement alors $\forall k \in \mathbb{N}\ x_k^{(n)} \to x_k$.
5. Montrer que la réciproque est vraie si la suite $(x^{(n)})_n$ est bornée.
6. En déduire que $\delta^{(n)} \to 0$ faiblement.
7. Montrer que si $x^{(n)} \to x$ faiblement et si $\|x^{(n)}\| \to \|x\|$ alors $\|x^{(n)} - x\|_2 \to 0$.

Fin d'exercice hors barème :

8. Soit $A = \{\sqrt{n}\ \delta^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que toute suite à valeurs dans A qui converge faiblement (dans ℓ^2) est constante à partir d'un certain rang.
9. Montrer d'autre part que 0 est adhérent à A pour la topologie faible.
10. En déduire que la topologie faible sur ℓ^2 n'est pas métrisable.

Exercice. **Cube de Hilbert**

On considère l'ensemble de suites réelles

$$K := \{(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_k \leq 2^{-k}\}.$$

1. Convergence d'une suite
   (a) Montrer que K est inclus dans ℓ^2 et borné (pour la distance déduite de $\| \|_2$).
   (b) Montrer que K est complet (pour cette distance).
   (c) Soient $(x^{(n)})_n$ une suite d'éléments de K et $x = (x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\forall k \in \mathbb{N}\ x_k^{(n)} \to x_k$ alors $\|x^{(n)} - x\|_2 \to 0$.
2. Compacité séquentielle
   (a) Soit $(x^{(n)})_n$ une suite d'éléments de K. Montrer qu'elle possède des sous-suites $(x^{(\varphi_p(n))})_n$ telles que la première, $(x^{(\varphi_0(n))})_n$, soit $(x^{(n)})_n$ elle-même, et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(x^{(\varphi_{p+1}(n))})_n$ soit une sous-suite de $(x^{(\varphi_p(n))})_n$ dont la p-ième composante converge dans $\mathbb{R}$: $x_p^{(\varphi_{p+1}(n))} \to x_p$.
   (b) On pose $\varphi(k) = \varphi_k(k)$. Vérifier que φ est strictement croissante et que la sous-suite $(x^{(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ a *toutes* ses composantes convergentes :
   $$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k^{(\varphi(n))} \to x_k.$$
   (c) En déduire (en utilisant 1.c) que K est compact.
   (d) En déduire que tout sous-espace de K est séparable.
3. Universalité de K
   Soit E un espace métrisable séparable, muni d'une distance $d \leq 1$ et d'une partie dense $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. On définit
   $$f : E \to K, \quad x \mapsto (2^{-k} d(x, a_k))_k.$$
   (a) Montrer que f est injective.

(b) Montrer que f est continue.

(c) En déduire que tout espace métrisable compact est homéomorphe à un fermé de K.

Fin d'exercice hors barème :

(d) Montrer que si $f(x_n) \to f(x)$ dans K (avec $x_n, x \in E$) alors $x_n \to x$ dans E.

(e) En déduire que tout espace métrisable séparable est homéomorphe à un sous-espace de K.

Corrigé

Exercice. **Topologie faible**

Notation : pour tout $y \in \ell^2$, notons f_y la forme linéaire $\ell^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle y, x\rangle$ (continue, de norme $\|y\|_2$).

1. $U_{y,\lambda} = f_y^{-1}(]\lambda, +\infty[)$. Réciproquement, chaque $f^{-1}(O)$, où O est un ouvert de $\mathbb{R}$ et f une forme linéaire continue, est une réunion d'intersections finies de tels $U_{y,\lambda}$. En effet, $f = f_y$ pour un certain $y \in \ell^2$ (d'après le théorème de représentation de Riesz) et O est une réunion d'intervalles ouverts $]\lambda_i, \mu_i[$, et $f^{-1}(O)$ est alors la réunion des $f_y^{-1}(]\lambda_i, \mu_i[) = U_{y,\lambda_i} \cap U_{-y,-\mu_i}$ (car$\langle y, x\rangle < \mu_i \Leftrightarrow \langle -y, x\rangle > -\mu_i$).
2. Soient u, v deux éléments distincts de ℓ^2, et soit $y = v - u$. Alors $f_y(v) - f_y(u) = \|y\|_2^2 > 0$ donc en choisissant un $\mu \in]f_y(u), f_y(v)[$, on obtient deux ouverts (pour la topologie faible), $f_y^{-1}(]-\infty, \mu[)$ et $f_y^{-1}(]\mu, +\infty[)$, contenant l'un u et l'autre v. Cela prouve que cette topologie est séparée.
   Les $f^{-1}(O)$, qui engendrent la topologie faible, sont tous des ouverts pour la topologie usuelle de ℓ^2, comme images réciproques d'ouverts par des applications continues pour la topologie usuelle sur ℓ^2. Cela prouve que la topologie faible sur ℓ^2 est moins fine que l'usuelle.
3. $x^{(n)} \to x$ faiblement ssi pour tout $y \in \ell^2$, tout ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient $\langle y, x\rangle$ contient les $\langle y, x^{(n)}\rangle$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire ssi $\forall y \in \ell^2 \quad \langle y, x^{(n)}\rangle \to \langle y, x\rangle$.
4. En particulier si $x^{(n)} \to x$ faiblement alors $\forall k \in \mathbb{N}\ \langle \delta^{(k)}, x^{(n)}\rangle \to \langle \delta^{(k)}, x\rangle$ c'est-à-dire $x_k^{(n)} \to x_k$.
5. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \|x^{(n)}\|_2 \leq M$ et que $\forall k \in \mathbb{N}\ x_k^{(n)} \to x_k$ et fixons un $y \in \ell^2$. D'après l'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwarz, pour tout $N \in \mathbb{N}$,
   $$\left|\langle y, x^{(n)}\rangle - \langle y, x\rangle\right| \leq \left|\sum_{k<N} y_k(x_k^{(n)} - x_k)\right| + 2M\sqrt{\sum_{k\geq N} y_k^2}.$$
   Pour tout $\varepsilon > 0$, le second terme de cette somme est $< \varepsilon$ pour N assez grand puis, en fixant un tel N, le premier terme est aussi $< \varepsilon$ pour tout n assez grand. Cela prouve que $\forall y \in \ell^2 \quad \langle y, x^{(n)}\rangle \to \langle y, x\rangle$, c'est-à-dire (d'après la question 3) que $x^{(n)} \to x$ faiblement.
6. La suite $(\delta^{(n)})_n$ est bornée (car $\forall n \in \mathbb{N}, \|\delta^{(n)}\|_2^2 = \sum_k (\delta_k^{(n)})^2 = 1$) et pour tout entier k, $\delta_k^{(n)} = 0$ pour tout $n > k$ donc $\delta_k^{(n)} \to 0$ quand $n \to \infty$. On déduit donc de la question précédente que $\delta^{(n)} \to 0$ faiblement.
7. Si $x^{(n)} \to x$ faiblement et si $\|x^{(n)}\|_2 \to \|x\|_2$ alors
   $\|x^{(n)} - x\|_2^2 = \|x^{(n)}\|_2^2 + \|x\|_2^2 - 2\langle x, x^{(n)}\rangle \to 2\|x\|_2^2 - 2\|x\|_2^2 = 0.$

Fin d'exercice hors barème :

8. Soit $(x^{(n)})_n$ une suite d'éléments de A ($x^{(n)} = \sqrt{m_n}\delta^{(m_n)}$ avec $m_n \in \mathbb{N}^*$), convergeant faiblement dans ℓ^2. Si cette suite n'est pas stationnaire alors (comme la topologie faible est séparée) elle prend une infinité de valeurs donc on peut (quitte à la remplacer une sous-suite bien choisie) supposer que les m_n sont distincts et que la série de leurs inverses converge. En posant alors $y_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ si k est égal à m_n pour un certain n pair et $y_k = 0$ pour toutes les autres valeurs de k, on obtient un $y \in \ell^2$ tel que la suite des $\langle y, x^{(n)}\rangle = y_{m_n}\sqrt{m_n}$ vaut alternativement 0 et 1 donc diverge, ce qui contredit la convergence faible de $(x^{(n)})_n$.

9. Tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient un ouvert de la forme

$$U = \{x \in \ell^2 \mid \forall i = 1, \dots, m\ |\langle y^{(i)}, x\rangle| < \varepsilon\}.$$

Montrons que U rencontre A. Comme $\sum_{k\in\mathbb{N},1\le i\le m}(y_k^{(i)})^2 = \sum_{1\le i\le m}\|y^{(i)}\|_2^2 < \infty$, il existe au moins un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{1\le i\le m}(y_k^{(i)})^2 < \varepsilon^2/k$. Pour un tel k on a, pour chaque i de 1 à m : $|y_k^{(i)}| < \varepsilon/\sqrt{k}$ donc $\sqrt{k}\ \delta^{(k)} \in U$.

10. Pour la topologie faible, d'après les deux questions précédentes, 0 est adhérent à A mais n'est pas limite d'une suite d'éléments de A, donc il n'a pas de base dénombrable de voisinages, ce qui prouve que cette topologie n'est pas métrisable.

Exercice. **Cube de Hilbert**

1. Convergence d'une suite
   (a) $\forall x \in K, \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k^2 \le \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-2k} = 4/3$ donc $x \in \ell^2$ et $\|x\|_2 \le 2/\sqrt{3}$.
   (b) K est complet, comme fermé dans le complet ℓ^2 (il est bien fermé, comme intersection des $f_{\delta^{(k)}}^{-1}([0, 2^{-k}])$).
   (c) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, x^{(n)} \in K$ et que $\forall k \in \mathbb{N}\ x_k^{(n)} \to x_k$ (donc $x \in K$, par passage à la limite dans les inégalités). Alors, pour tout entier N,

$$\|x^{(n)} - x\|_2^2 \le \sum_{k<N}(x_k^{(n)} - x_k)^2 + \sum_{k\ge N} 2^{-2k}$$

   Pour tout $\varepsilon > 0$, le second terme de cette somme est $< \varepsilon$ pour N assez grand puis, en fixant un tel N, le premier terme est aussi $< \varepsilon$ pour tout n assez grand. Cela prouve que $\|x^{(n)} - x\|_2 \to 0$.

2. Compacité séquentielle
   (a) Soit $(x^{(n)})_n$ une suite d'éléments de K. On construit par récurrence des sous-suites $(x^{(\varphi_p(n))})_n$ en posant $(x^{(\varphi_0(n))})_n = (x^{(n)})_n$ et en choisissant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(x^{(\varphi_{p+1}(n))})_n$ une sous-suite de $(x^{(\varphi_p(n))})_n$ dont la p-ième composante converge (il en existe puisque cette p-ième composante est à valeurs dans un compact, $[0, 2^{-p}]$).
   (b) $\varphi_{k+1}(k+1) > \varphi_{k+1}(k) \ge \varphi_k(k)$ (puisque φ_{k+1} est une sous-suite de φ_k) donc φ est strictement croissante.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite des $\varphi(n)$ pour $n > k$ est une sous-suite de φ_{k+1} donc (par construction de cette dernière) $x_k^{(\varphi(n))} \to x_k$.
   (c) K est donc un espace métrique dans lequel toute suite $(x^{(n)})_n$ a au moins une sous-suite $(x^{(\varphi(n))})_n$ qui converge composante par composante donc (d'après 1.c) qui converge pour la distance. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il est donc compact.
   (d) K est par conséquent (comme tout précompact) à base dénombrable (d'ouverts), donc tout sous-espace $L \subset K$ aussi, donc L est séparable.

3. Universalité de K
   (a) Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, c'est-à-dire tels que $\forall k \in \mathbb{N}, d(a_k, x) = d(a_k, y)$, montrons que $y = x$. Il existe une suite de la forme $(a_{k_n})_n$ convergant vers x. Alors, $d(a_{k_n}, y) = d(a_{k_n}, x) \to 0$ donc $y = \lim a_{k_n} = x$.
   (b) $\|f(y) - f(x)\|_2^2 = \sum 2^{-2k}\left(d(y, a_k) - d(x, a_k)\right)^2 \le \sum 2^{-2k} d(x, y)^2 = \frac{4}{3} d(x, y)^2$ donc f est $\frac{2}{\sqrt{3}}$-lipschitzienne et, a fortiori, continue.

(c) Sur tout espace métrique compact E, la distance d est bornée donc (en la divisant par un majorant, ce qui ne modifie pas la topologie – ou en procédant comme dans la question e ci-dessous), on peut supposer $d \leq 1$. Ce qui précède fournit alors une bijection continue de E dans $f(E) \subset K \subset \ell^2$. Puisque E est compact et que ℓ^2 est séparé, cette bijection est un homéomorphisme et le compact $f(E)$ est fermé dans K.

Hors barème :

(d) Supposons que $f(x_n) \to f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ puis k tel que $d(a_k, x) < \varepsilon$ puis N tel que

$$\forall n \geq N, \|f(x_n) - f(x)\|_2^2 < 2^{-2k}\varepsilon^2.$$

Alors, pour tout $n \geq N$, $|d(x_n, a_k) - d(x, a_k)| < \varepsilon$ donc

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, a_k) + d(a_k, x) < \varepsilon + 2d(a_k, x) < 3\varepsilon,$$

ce qui prouve que $x_n \to x$.

(e) Soit (E, d) un espace métrique séparable. Quitte à remplacer d par $\frac{d}{1+d}$, ce qui ne modifie pas la topologie (ni même la structure uniforme), on peut supposer $d \leq 1$. Les questions a et b fournissent alors une bijection continue de E dans $f(E) \subset K$. D'après la question d, la réciproque de cette bijection est séquentiellement continue, donc continue (puisque $f(E)$ est métrique donc à bases dénombrables de voisinages). C'est donc un homéomorphisme.

11.6 Examen de janvier 2015

Énoncé (Durée 3 heures. Aucun document n'est autorisé.)

Exercice 1

Soit (X, d) un espace métrique. Une *ϵ-chaîne de longueur n joignant $x \in X$ à $y \in X$* est une suite finie de points $x_1, \cdots, x_n$ dans X telle que $x_1 = x$, $x_n = y$ et $d(x_k, x_{k+1}) < \epsilon$ pour tout k. Les points x et y sont les *extrémités* de la chaîne. On dit qu'une partie A de X est *bien enchaînée* si pour tout $x \in A$, tout $y \in A$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une ϵ-chaîne contenue dans A et d'extrémités x et y.

1) Pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$ on note $X_{x,\epsilon}$ l'ensemble des points y de X tels que x et y soient les extrémités d'une ϵ-chaîne. Montrer que $X_{x,\epsilon}$ est fermé dans X. Montrer qu'un espace métrique connexe est bien enchaîné.
2) Montrer qu'un espace métrique compact et bien enchaîné est connexe. Donner un exemple d'espace métrique bien enchaîné et non connexe.
3) Montrer que toute ϵ-chaîne d'extrémités distinctes contient une ϵ-chaîne de mêmes extrémités et telle que les x_k soient deux à deux distincts.
4) Montrer que si X est compact et A est une partie bien enchaînée de X alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que pour tout $x, y \in A$ il existe une ϵ-chaîne dans A de longueur au plus N et joignant x à y.
5) Soit K_n une suite décroissante de parties compactes, connexes et non-vides de X et K leur intersection. Montrer que K est un compact non vide et bien enchaîné.
6) On suppose que X est compact. On note $\mathrm{Comp}^\star(X)$ l'ensemble des parties fermées (c'est à dire compactes) et non-vides de X. Pour tout $C \in \mathrm{Comp}^\star(X)$ et tout $r > 0$ on note C_r le r-voisinage de C :
$$C_r = \{x \in X \,:\, d(x, C) < r\}.$$
Pour $A, B \in \mathrm{Comp}^\star(X)$ on pose
$$H(A, B) := \inf\{r \,:\; A \subset B_r \text{ et } B \subset A_r\}.$$
Montrer que H est une distance sur $\mathrm{Comp}^\star(X)$ puis que l'ensemble des parties connexes, fermées et non-vides de X est un fermé de $(\mathrm{Comp}^\star(X), H)$.

Exercice 2

Soit $(H, \| \|)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ dans H *converge faiblement* vers $x \in H$ si et seulement si $\lim_n (x_n|a) = (x|a)$ pour tout $a \in H$.

1) Montrer que si $\lim_n \|x_n\| = 0$ alors x_n converge faiblement vers 0.
2) Montrer qu'il y a unicité de la limite faible. Montrer que si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x alors tel est aussi le cas pour toute sous-suite de $(x_n)_n$.
3) On suppose que $\lim_n ||x_n|| = \infty$. Pour tout entier k on définit F_k par

$$F_k := \{x \in H : \forall n \in \mathbf{N} \ , \ |(x_n|x)| \leq k\}.$$

i) Montrer que les F_k sont fermés.

ii) Montrer que si $v \in F_k$ et $\epsilon > 0$ alors $v + \epsilon \frac{x_n}{||x_n||} \notin F_k$ pour n assez grand et en déduire que les F_k sont d'intérieur vide.

4) Montrer que toute suite faiblement convergente est bornée. On utilisera le fait que, dans un espace métrique complet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

Corrigé
Exercice 1

1) Pour tout z adhérent à $X_{x,\varepsilon}$, il existe $y \in X_{x,\varepsilon}$ tel que $d(y, z) < \varepsilon$. En ajoutant z au bout d'une ε-chaîne de x à y, on obtient une ε-chaîne de x à z, donc $z \in X_{x,\varepsilon}$. Cela prouve que $X_{x,\varepsilon}$ est fermé.
   Il est aussi non vide (il contient x) et ouvert ($\forall y \in X_{x,\varepsilon}\ B(y, \varepsilon) \subset X_{x,\varepsilon}$) donc il est égal à X si X est connexe. On a donc, si X connexe : $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, tout point de X est joint à x par une ε-chaîne, autrement dit X est bien enchaîné.
2) Soit X compact non connexe, donc réunion de deux fermés non vides disjoints $F \ni x$ et $G \ni y$. Alors (puisque F est compact et disjoint du fermé G) $d(F, G) > 0$. Pour $\varepsilon < d(F, G)$, aucune ε-chaîne ne joint x à y, donc X est mal enchaîné.
   $\mathbb{Q}$ est bien enchaîné et non connexe.
3) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une ε-chaîne telle que $x_n \neq x_1$. On en extrait une sous ε-chaîne $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$ de x_1 à x_n de points tous distincts, par récurrence, en posant, par exemple en "marche avant" (on pourrait faire de même en "marche arrière") : $k_1 :=$ le plus grand indice tel que $x_{k_1} = x_1$ puis, pour chaque $i > 1$ tel que $k_i < n$: $k_{i+1} :=$ le plus grand indice $> k_i$ tel que $x_{k_{i+1}} = x_{k_i+1}$ (la suite des k_i est strictement croissante donc s'arrête avec, pour un certain indice m, $k_m = n$).
4) Soit, dans X compact (ou même seulement précompact), une partie A ne vérifiant pas cette propriété. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n, y_n \in A$ joints par aucune ε-chaîne de longueur $\leq n$. Quitte à les remplacer par des sous-suites bien choisies, on peut supposer que ces deux suites sont de Cauchy. Il existe alors N tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, x_N) < \varepsilon$ et $d(y_n, y_N) < \varepsilon$ donc une ε-chaîne de x_N à y_N serait nécessairement de longueur $> n - 2$, et cela pour n arbitrairement grand. Il n'en existe donc pas, ce qui prouve que A est mal enchaîné.
5) D'après le théorème des compacts emboîtés, K est un compact non vide. Montrons qu'il est bien enchaîné. Soient $\varepsilon > 0$ et U l'ouvert des points à distance $< \varepsilon$ de K. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = K \subset U$ donc l'intersection décroissante des compacts $K_n \setminus U$ est vide, donc ils sont vides à partir d'un certain rang N, c'est-à-dire que $\forall x \in K_N\ d(x, K) < \varepsilon$. Soient $x, y \in K$. Dans K_N (connexe donc bien enchaîné d'après la question 1), ils sont joints par une ε-chaîne $x = x_1, \ldots, x_n = y$, et il existe $y_1, \ldots, y_n \in K$ tels que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$, donc tels que $d(y_i, y_{i+1}) < 3\varepsilon$. En ajoutant $y_0 = x$ et $y_{n+1} = y$, on obtient une 3ε-chaîne dans K de x à y.
6) H est symétrique par définition.
   Pour tous $A, B \in \mathrm{Comp}^*(X)$, $H(A, B) = 0$ si et seulement si $A \subset \cap_{r>0} B_r = \overline{B} = B$ et (de même) $B \subset A$, donc si et seulement si $A = B$.

Pour tous $A, B, C \in \text{Comp}^*(X)$ et tous $r > H(A,B)$ et $s > H(B,C)$, on a $A \subset B_r$ et $B \subset C_s$ donc $A \subset (C_s)_r \subset C_{s+r}$ et (de même) $C \subset A_{s+r}$ donc

$$\forall r > H(A,B) \quad \forall s > H(B,C) \quad r+s \geq H(A,C),$$

c'est-à-dire : $H(A,B) + H(B,C) \geq H(A,C)$.
Montrons que si $(K(n))_n$ est une suite qui converge dans $(\text{Comp}^*(X), H)$ et si les $K(n)$ sont connexes, alors la limite K est connexe. D'après la question 2, il suffit de montrer que K est bien enchaîné, sachant (d'après la question 1) que les $K(n)$ le sont. Soient $\varepsilon > 0$ et $x, y \in K$. Il existe N tel que $H(K(N), K) < \varepsilon$. Puisque $K \subset K(N)_\varepsilon$, il existe $x', y' \in K(N)$ tels que $d(x,x'), d(y,y') < \varepsilon$. Soit $x' = x_1, \ldots, x_n = y'$ une ε-chaîne dans $K(N)$. Puisque $K(N) \subset K_\varepsilon$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$. On conclut comme dans la question précédente.

Exercice 2

1) $|(x_n|a)| \leq \|x_n\|\|a\|$.
2) Si x_n tend faiblement à la fois vers x et vers y alors $\forall a \in H\ (x|a) = (y|a)$ donc $x - y \in H^\perp = \{0\}$.
Si $(y_n)_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$ alors pour tout $a \in H$, $((y_n|a))_n$ est une sous-suite de $((x_n|a))_n$ donc si x_n tend faiblement vers x alors y_n aussi.
3) i) Soit D_k le disque complexe fermé de centre 0 et de rayon k. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathbb{R}$-linéaire $x \mapsto (x_n|x)$ est continue ($|\!|\!|p_n|\!|\!| = \|x_n\|$) donc $p_n^{-1}(D_k)$ est un fermé de H, donc $F_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_n^{-1}(D_k)$ aussi.
   ii) On a $v + \varepsilon \frac{x_n}{\|x_n\|} \notin F_k$ si et seulement si

$$\left| p_n\left(v + \varepsilon \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right| > k$$

   c'est-à-dire si $|(x_n|v) + \varepsilon\|x_n\|| > k$. Puisque $|(x_n|v)| \leq k$, ceci a lieu dès que $\varepsilon\|x_n\| > 2k$ donc (comme $\|x_n\| \to +\infty$) dès que n est assez grand.
   Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $v \in F_k$, si petit que soit $\varepsilon > 0$, la boule fermée de centre v et de rayon ε n'est pas incluse dans F_k, donc v n'est pas intérieur à F_k. Cela prouve que les F_k sont d'intérieur vide.
4) Soit $(y_n)_n$ une suite faiblement convergente et $(x_n)_n$ une sous-suite. Pour tout $x \in H$, la suite des scalaires $(x_n|x)$ est convergente donc bornée, c'est-à-dire que $x \in F_k$ pour k assez grand. La réunion des fermés F_k est donc égale à H, complet et d'intérieur non vide donc (théorème de Baire) l'un des F_k est d'intérieur non vide, ce qui prouve (question 3.ii) que $\|x_n\|$ ne tend pas vers $+\infty$. La suite $(|y_n\|)_n$, n'admettant aucune sous-suite de limite infinie, est donc bornée.

11.7 Partiel de novembre 2014

Énoncé (8h–11h sans document)

Exercice. **Questions de cours**

1. Rappeler la définition de la continuité uniforme.
2. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.
3. Démontrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.

Exercice. **Dénombrabilité** Soit A un ensemble à deux éléments. Montrer que l'ensemble des suites finies d'éléments de A est dénombrable.

Exercice. **Théorème de Kuratowski sur l'adhérence et le complémentaire**

Pour toute partie S d'un espace topologique X, notons kS l'adhérence de S, cS le complémentaire de S et iS l'intérieur de S. On utilisera des notations allégées, sans signes $\circ$ ni parenthèses, pour les diverses composées de k, c et i, appliquées à S.

1. Montrer que $kiS \subset kikS \subset kS$.
2. En déduire : $\forall T \subset X \quad kikiT = kiT$.
3. En déduire : $(kc)^4 = (kc)^2$.
4. En déduire que parmi toutes les applications de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ obtenues à partir de k et c par composition (qui, d'après l'exercice précédent, pourraient former un ensemble dénombrable) en fait au plus 15 (que l'on explicitera) sont distinctes.
5. Pour $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, montrer que ces 15 composées sont effectivement distinctes (considérer la partie $]0,1[\cup]1,2[\cup\{3\} \cup (\mathbb{Q}\cap]4,5[))$.
6. Existe-t-il des espaces X pour lesquels seules deux de ces composées sont distinctes ?
7. Existe-t-il des espaces X pour lesquels toutes ces composées sont égales ?

Exercice. **Version locale de la caractérisation de la continuité par les adhérences**

Soient X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application, et a un point de X. On suppose que pour toute partie A de X à laquelle a est adhérent, on a $f(a) \in \overline{f(A)}$. Le but de l'exercice est d'en déduire que f est continue au point a. On considère pour cela un voisinage arbitraire V de $f(a)$ et l'on pose $A = X \setminus f^{-1}(V)$.

1. Montrer que $f(a) \notin \overline{f(A)}$.
2. En déduire que a appartient à l'intérieur de $f^{-1}(V)$.
3. Conclure.

Exercice. **Topologie de la convergence simple**

Soient X un ensemble non dénombrable, Y un espace séparé contenant au moins deux points $y_0 \neq y_1$ et $E = Y^X$ l'ensemble des applications de X dans Y. Pour tout point x de X et tout ouvert U de Y, on pose

$$O_{x,U} = \{f \in E \mid f(x) \in U\}$$

puis on note $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les intersections finies de telles parties :

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i\in I} O_{x_i,U_i} \mid I \text{ fini } \}.$$

1. Montrer qu'il existe sur E une unique topologie $\mathcal{T}$ pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.
2. Montrer que $f_n \to f$ dans $(E, \mathcal{T})$ si et seulement si $\forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x)$ dans Y.
   On veut montrer que $(E, \mathcal{T})$ n'est pas à bases dénombrables de voisinages. Pour cela, on considère l'ensemble S des $f \in E$ qui valent y_0 "presque partout", au sens : sur une partie cofinie de X.
3. Montrer que S est dense dans E.
4. Soit $f \in E$ la fonction constante $x \mapsto y_1$. Montrer que f ne peut pas être limite d'une suite d'éléments de S.
5. Conclure.

Exercice. **Fonction de Thomae**

Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q, \text{ fraction irréductible non nulle.} \end{cases}$$

1. Montrer que T est limite uniforme d'une suite de fonctions T_n dont chacune, sur tout segment $[a, b]$, est nulle sauf en un nombre fini de points.
2. En déduire que pour tout réel c, $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} T(x) = 0$.
3. Quel est l'ensemble des points où T est continue ?

Exercice. **Distance d'un point à une partie**

Montrer que dans un espace métrique, on a toujours : $d(x, A) = d(x, \overline{A})$ (pour tout point x et toute partie A).

Exercice. **Complétude**

Dans un espace métrique, montrer que l'intersection d'une famille quelconque (finie ou pas) de parties complètes est complète.

Corrigé + barème sur 26

Exercice. **Questions de cours (2 pts)**

1. (0,5 pt) Une application f d'un espace métrique (E, d_E) dans un espace métrique (F, d_F) est dite uniformément continue si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \quad d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
2. (0,5 pt) Une suite (u_n) dans un espace métrique (E, d_E) est dite de Cauchy si
$$\forall \eta > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p, q \geq N, \quad d_E(u_p, u_q) < \eta.$$
3. (1 pt) Soient f et (u_n) comme ci-dessus et $\varepsilon > 0$ arbitraire. Avec les notations ci-dessus, soient $\eta > 0$ associé à ε dans la continuité uniforme de f, puis $N \in \mathbb{N}$ associé à ce η dans la propriété de Cauchy pour (u_n). Alors, pour tous $p, q \geq N$, on a $d_F(f(u_p), f(u_q)) < \varepsilon$. On a donc prouvé que
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p, q \geq N, \quad d_F(f(u_p), f(u_q)) < \varepsilon,$$
c'est-à-dire que $(f(u_n))$ est de Cauchy.

Exercice. **Dénombrabilité (1 pt)**

L'ensemble des suites finies d'éléments de A est la réunion disjointe, indexée par $n \in \mathbb{N}$, des A^n, qui sont finis et non vides (de cardinal 2^n). Il est donc dénombrable.

Exercice. **Théorème "14" de Kuratowski (6,5 pts)**

1. (0,5 pt) $S \subset kS$ donc $iS \subset ikS$ donc $kiS \subset kikS$, et $ikS \subset kS$ donc $kikS \subset kkS = kS$.
2. (0,5 pt) Pour $S = iT$, on en déduit : $kiiT \subset kikiT \subset kiT$, c'est-à-dire $kikiT = kiT$.
3. (0,5 pt) Puisque $(kc)^2 = k(ckc) = ki$, on en déduit : $(kc)^4 = (kc)^2$.
4. (2 pts) Corollaire : $c(kc)^4c = c(kc)^2c$, c'est-à-dire $(ck)^4 = (ck)^2$.
Pour obtenir, par composition à partir de k et c, toutes les applications possibles, il suffit de considérer les suites finies de lettres k et c dans lesquelles il n'y a jamais deux k consécutifs ni deux c consécutifs (car $k \circ k$ se simplifie en k et $c \circ c$ se simplifie en id).
On peut de plus exclure de même les suites finies contenant une sous-suite $kc \dots kc$ ou $ck \dots ck$ de longueur 8 (qui se simplifient, d'après la question précédente et son corollaire). Il reste donc au maximum 15 composées : id et 14 composées de longueurs 1 à 7 alternant k et c (2 par longueur, l'une commençant par k et l'autre par c).
On peut de plus éliminer $kckckck = c(ck)^4 = c(ck)^2 = kck$. Il en reste 14.
5. (2 pts) En rectifiant l'énoncé, montrons que ces 14 composées, appliquées à
$$A =]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap]4, 5[),$$

donnent des résultats différents. Calculons d'abord ceux qui "ressemblent" à A c'est-à-dire où c apparaît un nombre pair de fois (y compris $A = \mathrm{id}(A)$, où c apparait 0 fois). Ces 7 parties sont différentes car

$$kA = [0,2] \cup \{3\} \cup [4,5] \text{ donc } ckckA = ikA =]0,2[\cup]4,5[\text{ donc } kckckA = [0,2] \cup [4,5]$$

et

$$ckcA = iA =]0,1[\cup]1,2[\text{ donc } kckcA = [0,2] \text{ donc } ckckckcA = i(kckcA) =]0,2[.$$

Leurs 7 complémentaires (cA, ckA, $kckA$, $ckckckA$, kcA, $ckckcA$, $kckckcA$) sont donc aussi distincts entre eux, et différents des 7 précédents car non bornés. Les 14 composées sont donc distinctes.

6. (0,5 pt) Pour X discret, $k = \mathrm{id}$ donc les seules composées sont id et c.
7. (0,5 pt) Pour $X = \varnothing$, il n'y a qu'une application du singleton $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing\}$ dans lui-même.

Exercice. **Continuité par les adhérences : version locale (3,5 pts)**

1. (2 pts) $f(A) = f(X) \cap (Y \setminus V)$ est disjoint de V. L'existence d'un voisinage V de $f(a)$ qui ne rencontre pas $f(A)$ signifie que $f(a)$ n'est pas un point adhérent à $f(A)$.
2. (1 pts) Par contraposition de l'hypothèse, on en déduit que
$$a \in X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A) = \mathrm{int}(f^{-1}(V)).$$
3. (0,5 pt) On a montré que pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a, c'est-à-dire que f est continue au point a.

Exercice. **Topologie de la convergence simple (6 pts)**

1. (0,5 pt) E est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ et même, appartient à $\mathcal{B}$, puisque $E = O_{x,Y}$ (pour n'importe quel $x \in X$). L'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ et même, appartient à $\mathcal{B}$, par définition de $\mathcal{B}$. Il existe donc une unique topologie sur E dont $\mathcal{B}$ est base d'ouverts.
2. (2 pts) Les éléments de $\mathcal{B}$ contenant f forment une base de voisinages de f. On a donc $f_n \to f$ si et seulement si pour toute famille finie $(x_1, \ldots, x_m)$ de points de X et tous ouverts $U_1 \ni f(x_1), \ldots, U_m \ni f(x_m)$ de Y, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad f_n(x_i) \in U_i$.
Ceci implique en particulier (cas $m = 1$) que pour tout $x \in X$ et tout ouvert $U \ni f(x)$, U contient les $f_n(x)$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que $\forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x)$, autrement dit : (f_n) converge simplement vers f.
Réciproquement, si (f_n) converge simplement vers f alors, pour toute famille finie $(x_1, \ldots, x_m)$ de points de X et tous ouverts $U_1 \ni f(x_1), \ldots, U_m \ni f(x_m)$ de Y, il existe pour chaque i un rang N_i à partir duquel $f_n(x_i) \in U_i$ donc à partir du rang $N := \max(N_1, \ldots, N_m)$ on a bien $\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad f_n(x_i) \in U_i$.
3. (1 pt) Soit $f \in E$. Pour tout $O = \cap_{i=1}^m O_{x_i,U_i} \in \mathcal{B}$ contenant f, la fonction qui coïncide avec f aux points x_i et qui vant y_0 partout ailleurs appartient à $O \cap S$, qui est donc non vide. Ceci prouve que S est dense dans E.
4. (2 pts) Soit g une limite d'une suite (f_n) d'éléments de S, montrons que $g \neq f$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n des points où f_n ne vaut pas y_0 est au plus dénombrable donc la réunion A de ces A_n aussi, donc le complémentaire de A est non vide (car X est supposé non dénombrable). Pour tout x dans ce complémentaire, $f_n(x) = y_0$ pour tout n et (d'après la question 2) $f_n(x) \to g(x)$ donc (comme Y est supposé séparé) $g(x) = y_0$ donc $g(x) \neq y_1 = f(x)$.
5. (0,5 pt) Puisque cet élément f appartient à l'adhérence de S mais n'est pas limite d'une suite d'éléments de S, il n'a pas de base au plus dénombrable de voisinages.

Exercice. **Fonction de Thomae (3,5 pts)**

1. (1 pt) Pour tout entier $n > 0$, soit T_n la fonction qui vaut 0 sur les fractions irréductibles de dénominateurs $\geq n$ et qui coïncide avec T partout ailleurs. Sur tout segment $[a, b]$, T_n est donc nulle sauf en un nombre fini de points. Pour tout x, $T(x) - T_n(x)$ est soit nul, soit égal à $1/q$ avec $q \geq n$, donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |T(x) - T_n(x)| \leq 1/n$ donc $T_n \to T$ uniformément.
2. (2 pts) Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. D'après la question précédente, il existe N tel que $\forall n \geq N, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |T_n(x) - T(x)| \leq \varepsilon$. Pour ce N, soit V l'ensemble des réels x tels que $x = c$ ou $T_N(x) = 0$. C'est un voisinage de c (car il contient c et son complémentaire est une partie de $\mathbb{R}$ finie donc fermée) et pour tout $x \in V \setminus \{c\}$ on a $|T(x)| = |T(x) - T_N(x)| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} T(x) = 0$.
3. (0,5 pt) T est donc continue en c si et seulement si $T(c) = 0$, c'est-à-dire $c \notin \mathbb{Q}$.

Exercice. **Distance d'un point à une partie (1,5 pts)**
Pour tout $y \in \overline{A}$, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ et $d(y, A) = 0$ donc $d(x, A) \leq d(x, y)$. Par conséquent, $d(x, A) \leq \inf_{y\in\overline{A}} d(x, y) = d(x, \overline{A})$. Réciproquement, $d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$ car $A \subset \overline{A}$.
Exercice. **Complétude (2 pts)**
Soit F l'intersection d'une famille (non vide) $(F_i)_{i\in I}$ de parties complètes (donc fermées) de E. Fixons un élément j de I. F étant un fermé de E inclus dans F_j, c'est un fermé de F_j. Comme F_j est complet, F aussi.

11.8 Devoir surveillé de décembre 2014

Énoncé (3h30–16h30. Les documents autorisés sont les notes et polycopiés de cours et de TD (aux examens, ils ne le seront pas). Le barème est sur 27 points.

Vocabulaire. Dans un espace métrique, pour tout point x et toute partie non vide A, on dit qu'un point y est **une meilleure approximation de** x **dans** A s'il "réalise" la distance de x à A, c'est-à-dire si

$$y \in A \quad \text{et} \quad d(x, y) = d(x, A).$$

Notations.

- δ_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) est la suite définie par : $\delta_n(n) = 1$ et les autres $\delta_n(k)$ sont nuls.
- c_0 désigne l'e.v.n. des suites réelles de limite nulle, muni de la norme $\|t\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n|$.

Exercice. **Distance à un fermé** (5 pts)
Une partie non vide F d'un espace métrique E est dite proximinale dans E si tout point de E admet (au moins) une meilleure approximation dans F.

1. (1 pt) Montrer qu'un tel F est nécessairement fermé.
2. (2 pts) Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme (n'importe laquelle puisque toutes sont équivalentes), montrer que tout fermé non vide F est proximinal. (Indication : pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta = d(x, F)$, considérer l'ensemble $F \cap \overline{B(x, \delta + 1)}$.)
3. Dans c_0, montrer que l'ensemble $F := \{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est :
   (a) (1 pt) fermé ;
   (b) (1 pt) non proximinal.

Exercice. **Distance à un hyperplan fermé** (7 pts)
Soit h une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E. On suppose que h est continue de norme 1, c'est-à-dire qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall x \in E \quad |h(x)| \leq \|x\|$$

et il existe dans E une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} |h(u_n)| = 1.$$

On note H le noyau de h et x un vecteur arbitraire de E.

1. (0,5 pt) Montrer que $\forall y \in H \quad \|x - y\| \geq |h(x)|$ puis, que $d(x, H) \geq |h(x)|$.
2. (2 pts) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessus vérifie :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |h(x)| \geq |h(u_n)| d(x, H).$$

   (Suggestion : lorsque $h(u_n) \neq 0$ donc $E = \mathbb{R}u_n \oplus H$, décomposer x.)
3. (0,5 pt) En déduire que $d(x, H) = |h(x)|$.
4. (1 pt) On suppose dans cette question que la norme de h (égale à 1) n'est "pas atteinte", c'est-à-dire qu'il n'existe pas de vecteur v de norme 1 tel que $|h(v)| = 1$. Montrer que le fermé H est alors "très non proximinal" dans E, c'est-à-dire que *pour tout* $x \in E \setminus H$, x n'a pas de meilleure approximation dans H.
5. (3 pts) Sur c_0, soit h la forme linéaire définie par

   $$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n/2^{n+1}.$$

   Montrer que h est continue de norme 1 (cf. introduction de l'exercice) mais que cette norme n'est "pas atteinte" (cf. définition de la question précédente).

Exercice. **Connexité : ordinaire et par arcs, locale et globale** (6 pts)
Rappel : pour toute propriété topologique "truc", un espace est dit localement truc lorsque chacun de ses points admet une base de voisinages dont tous sont trucs.

1. (1 pt) Montrer que tout ouvert d'un espace localement truc est, lui aussi, localement truc.
2. (2 pts) La propriété truc étant ici soit la connexité, soit la connexité par arcs, montrer (sans distinguer les deux cas) que dans un espace localement truc, les composantes trucs sont à la fois ouvertes et fermées.
3. (1 pt) En déduire que tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.
4. Soient $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$, $X =]0, +\infty[\times K$, $D = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $Y = X \cup D$. Expliquer *très brièvement* pourquoi :
   (a) (0,5 pt) Y est connexe par arcs ;
   (b) (1 pt) X n'est pas localement connexe (cf. question 2) ;
   (c) (0,5 pt) Y non plus (cf. question 1).

Exercice. **Enveloppe convexe-fermée** (9 pts)
Dans un e.v.n. E, soient A une partie non vide et $\mathrm{co}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients positifs ou nuls de somme 1, de familles finies d'éléments de A (c'est le plus petit convexe contenant A).

1. (1 pt) Montrer que son adhérence $\overline{\mathrm{co}(A)}^E$ dans E est le plus petit convexe fermé de E contenant A.
2. (2 pts) Montrer que si A est fini alors $\mathrm{co}(A)$ est compact.
3. (2,5 pts) En déduire que si A est précompact alors $\mathrm{co}(A)$ est précompact.
4. (1 pt) En déduire que si E est complet et A précompact alors $\overline{\mathrm{co}(A)}^E$ est compact.

5. On considère le sous-espace E de c_0 constitué des suites nulles à partir d'un certain rang et la partie A de E définie par $A = \{0\} \cup \{\delta_n/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
   (a) (0,5 pt) Montrer que A est compact.
   (b) (0,5 pt) On pose $y_n = \sum_{1\le k\le n} \frac{\delta_k}{k2^k}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \mathrm{co}(A)$.
   (c) (0,5 pt) Montrer que la suite (y_n) converge dans c_0 vers un $y \notin E$.
   (d) (1 pt) En déduire que $\overline{\mathrm{co}(A)}^E$ n'est pas compact.

Corrigé

Exercice. **Distance à un fermé** (5 pts)

1. (1 pt) Soit F proximinal. Pour tout $x \in \overline{F}$, soit y une meilleure approximation de x dans F. Alors, $d(x, y) = d(x, F) = 0$ donc $x = y \in F$. Ceci prouve que $\overline{F} \subset F$, c'est-à-dire que F est fermé.
2. (2 pts) Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide, $\delta = d(x, F)$ et $K = F \cap \overline{B(x, \delta + 1)}$. Alors, K est non vide (par définition de δ), et compact (car fermé borné dans $\mathbb{R}^n$). L'application $K \to \mathbb{R}, z \mapsto d(x, z)$ étant continue sur ce compact, il existe (au moins) une meilleure approximation y de x dans K. Par définition de K, un tel y est aussi une meilleure approximation de x dans F.
3. (a) (1 pt) La distance entre deux éléments distincts quelconques de F vaut 1 donc toute suite à valeurs dans F qui converge vers un $x \in c_0$ est constante à partir d'un certain rang, si bien que $x \in F$. Ceci prouve que F est fermé.
   (b) (1 pt) Soit x l'élément $(-2^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ de c_0.
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x, \delta_n) = \sup_{k\in\mathbb{N}} (\delta_n(k) + 2^{-k}) = 1 + 2^{-n}$$
   donc $d(x, F) = 1$ et cette distance n'est réalisée par aucun élément de F.

Exercice. **Distance à un hyperplan fermé** (7 pts)

1. (0,5 pt) $\forall y \in H \quad |h(x)| = |h(x - y)| \le \|x - y\|$. Tous les $\|x - y\|$ (pour $y \in H$) étant $\ge |h(x)|$, leur borne inférieure $d(x, H)$ aussi.
2. (2 pts) Si $h(u_n) = 0$, l'inégalité est immédiate. Si $h(u_n) \ne 0$, u_n n'appartient pas à l'hyperplan H donc $E = \mathbb{R}u_n \oplus H$. Il existe alors $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $y_n \in H$ tels que $x = \lambda_n u_n + y_n$ donc d'une part $h(x) = \lambda_n h(u_n)$ et d'autre part, $d(x, H) \le d(x, y_n) = \|\lambda_n u_n\| = |\lambda_n|\|u_n\| = |\lambda_n|$. On a donc bien $|h(u_n)|d(x, H) \le |h(u_n)||\lambda_n| = |h(x)|$.
3. (0,5 pt) Puisque $\lim_{n\to\infty} |h(u_n)| = 1$, on déduit de la question 3 que $d(x, H) \le |h(x)|$ donc (d'après la question 2) $d(x, H) = |h(x)|$.
4. (1 pt) Raisonnons par contraposition. S'il existe un $x \in E \setminus H$ possédant une meilleure approximation y dans H alors, en posant $v = (x - y)/\|x - y\|$, on a $\|v\| = 1$ et $|h(v)| = |h(x)|/\|x - y\| = |h(x)|/d(x, H) = 1$ (d'après la question précédente).
5. (3 pts) h est continue de norme 1 car d'une part
   $$\forall x \in c_0 \quad |h(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| 2^{-(n+1)} \le \|x\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} = \|x\|_\infty$$
   et d'autre part, pour $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k$, on a bien :
   $$\|u_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad h(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-(k+1)} = 1 - 2^{-n} \to 1.$$

Soit $v \in c_0$ de norme 1. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad |v_n| \leq 1/2$ et alors,

$$|h(v)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} 2^{-(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-(n+1)} = 1 - 2^{-(N+1)} < 1.$$

Exercice. **Connexité : ordinaire et par arcs, locale et globale** (6 pts)

1. (1 pt) Soient X localement truc, U un ouvert de X et $x \in U$. Il existe une base de voisinages trucs de x dans X. Parmi les éléments de cette base, ceux inclus dans U forment alors une base de voisinages (trucs) de x dans U.
2. (2 pts) Soient X localement truc, C l'une de ses composantes trucs et $x \in C$. Alors x admet un voisinage V truc (et même une base de tels voisinages). Puisque C est le plus grand truc contenant x, il contient V, donc c'est un voisinage de x. Ainsi, C est voisinage de tous ses points, c'est-à-dire ouvert. Son complémentaire est ouvert (comme réunion des autres composantes trucs), si bien que C est aussi fermé.
3. (1 pt) Soient $X \neq \varnothing$ connexe et localement connexe par arcs et C l'une de ses composantes connexe par arcs. Alors C est non vide et (d'après la question précédente) ouvert et fermé donc (puisque X est connexe) $C = X$.
4. (0,5 + 1 + 0,5 = 2 pts)
   (a) Tout point de X est joint à un point de la droite D par un segment dans Y.
   (b) Dans X, $]0, +\infty[\times\{0\}$ est une composante connexe non ouverte.
   (c) X est ouvert dans Y.

Exercice. **Enveloppe convexe-fermée** (9 pts)

1. (1 pt) $\overline{\mathrm{co}(A)}^E$ est fermé et convexe (comme adhérence d'un convexe) et contient $\mathrm{co}(A)$ donc A. C'est le plus petit car pour tout convexe fermé C contenant A, C est fermé et contient $\mathrm{co}(A)$ donc $\overline{\mathrm{co}(A)}^E$.
2. (2 pts) Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ alors $\mathrm{co}(A)$ est compact, comme image, par l'application $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \sum t_i a_i$ (à valeurs dans E, séparé) de $[0,1]^n \cap \{(t_1, \ldots, t_n) \mid t_1 + \ldots + t_n = 1\}$ (compact car fermé borné de $\mathbb{R}^n$).
3. (2,5 pts) Soient A précompact et $\varepsilon > 0$. Il existe une partie finie F de A telle que $A \subset F + B(0, \varepsilon)$ donc $\mathrm{co}(A) \subset \mathrm{co}(F) + B(0, \varepsilon)$. D'après la question précédente, il existe une partie finie G de $\mathrm{co}(F)$ telle que $\mathrm{co}(F) \subset G + B(0, \varepsilon)$. Finalement, $\mathrm{co}(A) \subset G + B(0, 2\varepsilon)$.
4. (1 pt) Si A est précompact alors $\overline{\mathrm{co}(A)}^E$ l'est donc aussi. Il est de plus fermé dans E, donc complet si E l'est. Il est alors compact.
5. (0,5 + 0,5 + 0, 5 + 1 = 2,5 pts)
   (a) Dans un espace séparé, l'ensemble des termes d'une suite convergente et de sa limite forme un compact.
   (b) y_n est le barycentre des $n+1$ éléments $\delta_1/1, \ldots, \delta_n/n, 0 \in A$ affectés des $n+1$ coefficients $1/2^1, \ldots, 1/2^n, 1/2^n$.
   (c) $y := (0, \frac{1}{1.2^1}, \frac{1}{2.2^2}, \frac{1}{3.2^3}, \ldots) \in c_0 \setminus E$ et $\|y - y_n\|_\infty = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \to 0$.
   (d) D'après b) et c), la suite (y_n) est à valeurs dans $\overline{\mathrm{co}(A)}^E$ mais n'a aucune valeur d'adhérence dans cet espace, qui n'est donc pas compact.

11.9 Devoir surveillé d'octobre 2014

Énoncé (13h30–16h30)

Les document autorisés sont les notes de cours et le polycopié (aux examens ils ne le seront pas).

Exercice. **Les topologies les plus simples**

1. Sur un ensemble quelconque, quelles sont la topologie la plus fine et la moins fine ?
2. Quels sont les ensembles sur lesquels il n'existe qu'une topologie ?

Exercice. **Deux topologies sur** $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Sur $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, soient $\mathcal{T}_{ord}$ la topologie de l'ordre usuel et $\mathcal{T}_{cof}$ la topologie cofinie (celle dont les ouverts sont $\varnothing$ et les parties de complémentaire fini).

1. Pour chaque point x de X (entier ou $+\infty$), donner une base de voisinages de x pour $\mathcal{T}_{ord}$.
2. Même question pour $\mathcal{T}_{cof}$.
3. Montrer que l'une de ces deux topologies est strictement plus fine que l'autre.

Exercice. **Démonstration de Furstenberg de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers**

On considère l'ensemble suivant de parties de $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B} := \{[k]_m \mid m \in \mathbb{Z}^*,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

où $[k]_m$ désigne l'ensemble des entiers congrus à k modulo m :

$$[k]_m := k + m\mathbb{Z} = \{k + mj \mid j \in \mathbb{Z}\}.$$

1. *(Hors barème)* Montrer que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est toujours soit vide, soit un élément de $\mathcal{B}$.
2. En déduire qu'il existe sur $\mathbb{Z}$ une unique topologie pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts. Dans la suite, $\mathbb{Z}$ est supposé muni de cette topologie.
3. Montrer que tout ouvert non vide de $\mathbb{Z}$ est infini.
4. En déduire que l'ensemble $A := \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ n'est pas fermé.
5. Montrer que tout élément de $\mathcal{B}$ est fermé.
6. *(Hors barème)* Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $A = \cup_{p \in \mathcal{P}} [0]_p$.
7. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice. **Composition de limites**

Soient X, Y et Z trois espaces topologiques, A une partie de X, $f : A \to Y$ une application ayant une limite y_0 en un certain point x_0 de X adhérent à A et $g : Y \to Z$ une application continue au point y_0. Montrer que $g \circ f$ a pour limite $g(y_0)$ au point x_0. *Exercice.*

Continuité d'une application à valeurs dans un produit

Soient X et Y deux espaces topologiques, $X \times Y$ l'espace produit et

$$p_X : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x, \quad p_Y : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$$

les deux projections canoniques. Montrer que :

1. p_X et p_Y sont continues ;
2. pour tout espace topologique Z, une application $f : Z \to X \times Y$ est continue si et seulement si $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ le sont ;
3. dans le cas particulier où Y est un singleton, p_X est un homéomorphisme.

Exercice. **Adhérence, intérieur et frontière d'un produit**

Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X, B une partie de Y, et C la partie $A \times B$ de l'espace produit $X \times Y$. Montrer que

1. $\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B}$,
2. $\mathring{C} = \mathring{A} \times \mathring{B}$,
3. $\mathrm{Fr}(C) = (\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B))$.

Exercice. **Topologie définie par les voisinages**

Soient un ensemble E et une application

$$\mathcal{V} : E \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)).$$

1. Vérifier que si E est muni d'une topologie pour laquelle $\mathcal{V}$ est l'application qui à chaque point a de E associe l'ensemble des voisinages de a, alors $\mathcal{V}$ possède les cinq propriétés suivantes (pour tout $a \in E$)
   (a) $\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad [V \subset W \subset E \;\Rightarrow\; W \in \mathcal{V}(a)]$,
   (b) $\forall V, W \in \mathcal{V}(a) \quad V \cap W \in \mathcal{V}(a)$,
   (c) $E \in \mathcal{V}(a)$,
   (d) $\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad a \in V$,
   (e) $\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad \exists W \in \mathcal{V}(a) \quad \forall y \in W \quad V \in \mathcal{V}(y)$.

   La suite de l'exercice consiste à démontrer la réciproque. On suppose donc que $\mathcal{V}$ est une application vérifiant ces cinq propriétés, et l'on note $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties O de E qui vérifient : $\forall x \in O \quad O \in \mathcal{V}(x)$. Montrer que :
2. $\mathcal{T}$ est une topologie sur E ;
3. pour tout $a \in E$ et tout voisinage V de a pour $\mathcal{T}$, $V \in \mathcal{V}(a)$;
4. pour toute partie V de E, l'ensemble

   $$O := \{x \in E \mid V \in \mathcal{V}(x)\}$$

   appartient à $\mathcal{T}$;
5. pour tout $a \in E$ et tout $V \in \mathcal{V}(a)$, V est un voisinage de a pour $\mathcal{T}$.

Corrigé

Exercice. **Les topologies les plus simples (1 pt)**

1. **(0,5 pt)** La topologie la plus fine sur E est la topologie discrète $\mathcal{P}(E)$; la moins fine est la topologie grossière $\{\varnothing, E\}$.
2. **(0,5 pt)** Il n'existe qu'une topologie sur E si et seulement si les seules parties de E sont $\varnothing$ et E, c'est-à-dire si E est un singleton ou l'ensemble vide.

Exercice. **Deux topologies sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (3 pts)**

1. **(1 pt)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le singleton $\{n\}$ est un ouvert de $\mathcal{T}_{ord}$ et même un intervalle ouvert (car $\{n\} =]n-1, n+1[$ si $n > 0$, et $\{0\} = \{y \in X \mid y < 1\}$). C'est donc le plus petit voisinage de n et à ce titre, il constitue, à lui tout seul, une base de voisinages de n. Quant aux voisinages de $+\infty$, ce sont les parties de X contenant un intervalle de la forme $I_n := \{y \in X \mid y > n\}$ pour un certain entier n, donc ces I_n constituent une base de voisinages de $+\infty$.
2. **(1 pt)** Pour $\mathcal{T}_{cof}$, une partie V de X est un voisinage de x si et seulement si elle contient une partie cofinie contenant x, ce qui équivaut simplement à : V contient x et est, elle-même, cofinie, ou encore : V contient x et tous les entiers à partir d'un certain rang. Une base de voisinage de x est donc, par exemple, constituée des $J_n \cup \{x\}$, avec $J_n := \{y \in \mathbb{N} \mid y > n\}$ (remarquons que $J_n \cup \{+\infty\} = I_n$ donc $+\infty$ a mêmes voisinages pour les deux topologies).

3. **(1 pt)** Pour tout $x \in X$, tout voisinage de x pour $\mathcal{T}_{cof}$ est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_{ord}$, mais la réciproque n'est vraie que pour $x = +\infty$. Donc $\mathcal{T}_{ord}$ est strictement plus fine que $\mathcal{T}_{cof}$.

Exercice. **Démonstration de Furstenberg de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers (4 pts + 2 pts h. b.)**

1. *(Hors barème)* **(1 pt)** Si $[k]_m \cap [k']_{m'} \neq \varnothing$, soit $k'' \in [k]_m \cap [k']_{m'}$. Alors, $[k]_m \cap [k']_{m'} = [k'']_m \cap [k'']_{m'} =$ l'ensemble des entiers n tels que $n - k''$ soit divisible à la fois par m et par m', donc $[k]_m \cap [k']_{m'} = [k'']_{\text{ppcm}(m,m')}$.
2. **(1 pt)** Il existe sur $\mathbb{Z}$ une unique topologie pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, puisque $\mathcal{B}$ vérifie les deux conditions suffisantes : $\mathbb{Z}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$ (on a même $\mathbb{Z} = [0]_1$) et l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$ (c'est même une union de 0 ou 1 élément de $\mathcal{B}$, selon qu'elle est vide ou pas).
3. **(0,5 pt)** Tout ouvert non vide de $\mathbb{Z}$ est infini car il contient au moins une classe de congruence $[k]_m$, infinie.
4. **(0,5 pt)** $A := \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert, puisqu'il est non vide et fini.
5. **(1 pt)** Pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$, les $|m|$ classes de congruence modulo m sont des ouverts. Chacune est donc aussi fermée puisque son complémentaire est l'union des $|m| - 1$ autres.
6. *(Hors barème)* **(1 pt)** 1 et -1 ne sont divisibles par aucun nombre premier. Réciproquement, tout entier $n \neq \pm 1$ est divisible par au moins un nombre premier : par exemple le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1.
7. **(1 pt)** $\mathcal{P}$ est infini, sinon, d'après ce qui précède, A serait une réunion finie de fermés donc un fermé, or A n'est pas fermé.

Exercice. **Composition de limites (1,5 pts)**

Soit U un voisinage de $g(y_0)$. Par continuité de g en y_0, l'ensemble $V := g^{-1}(U)$ est un voisinage de y_0. Comme f admet y_0 pour limite en x_0, il existe donc un voisinage W de x_0 tel que $f(W \cap A) \subset V$. Puisqu'alors $(g \circ f)(W \cap A) \subset g(V) \subset U$, ceci prouve que pour tout voisinage U de $g(y_0)$, il existe un voisinage W de x_0 tel que $(g \circ f)(W \cap A) \subset U$, c'est-à-dire que $g \circ f$ admet $g(y_0)$ pour limite en x_0.

Exercice. **Continuité d'une application à valeurs dans un produit (2,5 pts)**

1. **(0,5 pt)** Pour tout ouvert U de X, $p^{-1}(U) = U \times Y$ est un ouvert (élémentaire) de $X \times Y$ donc p_X est continue. De même, p_Y est continue.
2. **(1 pt)** Si f est continue alors $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ aussi (d'après la question précédente et l'exercice ci-dessus). Réciproquement, supposons que $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues. Alors, pour tous ouverts U de X et V de Y, $f^{-1}(U \times V) = (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V)$ est ouvert dans Z (comme intersection finie d'ouverts). Comme ces $U \times V$ forment une base d'ouverts de $X \times Y$, ceci suffit à prouver que f est continue.
3. **(1 pt)** Si Y est un singleton (muni de son unique topologie, cf. exercice 1) alors l'application p_X est bijective, elle est continue d'après la question 1, et sa bijection réciproque $p_X^{-1} : X \to X \times Y$ est continue d'après la question 2, puisque l'application identité $p_X \circ p_X^{-1}$ et l'application constante $p_Y \circ p_X^{-1}$ sont continues. C'est donc un homéomorphisme.

Exercice. **Adhérence, intérieur et frontière d'un produit (3 pts)**

1. **(1 pt)** $\overline{C}$ est inclus dans $\overline{A} \times \overline{B}$ car (par continuité de p_X, cf. exercice précédent) $p_X(\overline{C}) \subset \overline{p_X(C)} \subset \overline{A}$ et de même, $p_Y(\overline{C}) \subset \overline{B}$. Réciproquement, il contient $\overline{A} \times \overline{B}$ car pour $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$, tout voisinage de (a, b) contient un ouvert élémentaire $U \times V$ contenant (a, b), et un tel ouvert rencontre C (car U, voisinage de $a \in \overline{A}$, rencontre A, et de même, V rencontre B).

2. **(1 pt)** $\mathring{C}$ est l'union des ouverts élémentaires non vides $U \times V$ inclus dans C. Un tel $U \times V$ est inclus dans $\mathring{A} \times \mathring{B}$ (car U est un ouvert inclus dans A donc dans $\mathring{A}$ et de même, $V \subset \mathring{B}$). L'ensemble $\mathring{A} \times \mathring{B}$ est donc le plus gros ouvert élémentaire inclus dans C, si bien que $\mathring{C}$ lui est égal.
3. **(1 pt)** D'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(C) = (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus \left(\mathring{A} \times \mathring{B}\right) &= (\overline{A} \times \overline{B}) \cap \left[\left((X \setminus \mathring{A}) \times Y\right) \cup \left(X \times (Y \setminus \mathring{B})\right)\right] \\ &= \left[(\overline{A} \times \overline{B}) \cap \left((X \setminus \mathring{A}) \times Y\right)\right] \cup \left[(\overline{A} \times \overline{B}) \cap \left(X \times (Y \setminus \mathring{B})\right)\right] \\ &= \left((\overline{A} \setminus \mathring{A}) \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times (\overline{B} \setminus \mathring{B})\right) = \left(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\right).\end{aligned}$$

Exercice. **Topologie définie par les voisinages (5 pts)**

1. **(1 pt)** Pour toute topologie sur E (et tout $a \in E$), on a bien :
   (a) tout sur-ensemble W d'un voisinage V de a est un voisinage de a (car V contient un ouvert O contenant a donc W contient ce même O) ;
   (b) l'intersection de deux voisinages V et W de a est un voisinage de a (car V contient un ouvert O contenant a et W contient un ouvert O' contenant a, donc $V \cap W$ contient $O \cap O'$, qui contient a et est ouvert comme intersection de deux ouverts) ;
   (c) E est un voisinage de a (car c'est un ouvert contenant a) ;
   (d) tout voisinage de a contient a (puisqu'il contient un ouvert contenant a) ;
   (e) soit V un voisinage de a : il contient un ouvert W contenant a. L'ouvert W est un voisinage de a. Il est même voisinage de tous ses points donc le sur-ensemble V est voisinage de ces mêmes points.
2. **(1 pt)** $\varnothing \in \mathcal{T}$ car $[\forall x \in \varnothing \quad P(x)]$ est vrai pour n'importe quelle proposition $P(x)$, en particulier pour la proposition $\varnothing \in \mathcal{V}(x)$. $E \in \mathcal{T}$ d'après **iii**. Si $O, O' \in \mathcal{T}$ alors $O \cap O' \in \mathcal{T}$ d'après **ii**. Si $O_i \in \mathcal{T}$ pour tout $i \in I$ alors $\cup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$ d'après **i**. Donc $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.
3. **(1 pt)** Soit V un voisinage de a pour $\mathcal{T}$. Il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $a \in O$ (c'est-à-dire $O \in \mathcal{V}(a)$) et $O \subset V$. Donc $V \in \mathcal{V}(a)$ d'après **i**.
4. **(1 pt)** Par définition de $\mathcal{T}$ et O, il s'agit de vérifier que pour tout x tel que $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $O \in \mathcal{V}(x)$. Utilisons **v** : pour un tel x, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset O$. Par **i**, on en déduit $O \in \mathcal{V}(x)$.
5. **(1 pt)** L'ouvert O de la question précédente est inclus dans V d'après **iv**. Pour tout a tel que $V \in \mathcal{V}(a)$, on a de plus $a \in O$, donc V est un voisinage de a.

11.10 Examen de rattrapage de juin 2014

Énoncé (13h-16h)

Exercice. Montrer (par des contre-exemples) que

1. la frontière d'une partie connexe n'est pas forcément connexe,
2. $\overline{A}$ connexe $\not\Rightarrow$ A connexe,
3. A, B connexes $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ connexe,

4. A, B connexes $\not\Rightarrow A \cup B$ connexe.

Exercice.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, trouver un exemple très simple de deux parties A, B homéomorphes, telles que A^c (le complémentaire de A) soit connexe et B^c non connexe.
2. Même question dans $\mathbb{R}$.

Exercice. Soient E et F deux espaces métriques. Dans l'espace (métrisable) des applications de E dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme, montrer que le sous-espace des applications uniformément continues est fermé.

Exercice. Soient E, F deux espaces topologiques et f une application de E dans F.

1. Un théorème du cours assure que si f est continue alors son graphe est fermé (dans $E \times F$), moyennant une certaine hypothèse : laquelle ?
2. Démontrer que la réciproque est vraie si F est compact.
3. Montrer (par un contre-exemple) que la réciproque est fausse si $E = F = \mathbb{R}$.

Exercice. Soit $\mathcal{C}([0,1])$ l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme.

1. Définir une application simple $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ telle que les solutions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(x) = f(x - x^2)$$
soient exactement les points fixes de T.
2. Vérifier que T est affine, c'est-à-dire que l'application $S : f \mapsto T(f) - T(0)$ est linéaire.
3. Montrer que $T \circ T$ est une contraction. Qu'en déduit-on ?

Exercice. Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $A : E \to F$ une application linéaire. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x \in E \quad \|A(x)\| \geq \varepsilon \|x\|.$$

1. Montrer que A est injective.
2. On note $\mathrm{im}(A)$ son image. Montrer que l'application $\mathrm{im}(A) \to E, A(x) \mapsto x$ (évidemment linéaire) est continue.
3. En déduire que si A est continue et si E est complet, alors $\mathrm{im}(A)$ est fermé dans F.

Exercice. Soient H un espace hilbertien réel, $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue.

1. Montrer qu'il existe $f \in H$ et $A : H \to H$ linéaire continue tels que
$$\forall x, y \in H \quad L(y) = \langle f, y \rangle \text{ et } a(x,y) = \langle A(x), y \rangle.$$
2. On suppose désormais qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x \in H \quad a(x,x) \geq \varepsilon \|x\|^2.$$
Déduire de l'exercice précédent que A est injective et d'image fermée.
3. Montrer que $(\mathrm{im}(A))^\perp = \{0\}$.
4. En déduire qu'il existe un unique $x \in H$ tel que $\forall y \in H \quad L(y) = a(x,y)$.

Corrigé

Exercice. (4 pts)

1. Dans $\mathbb{R}$, $[0,1]$ est connexe mais sa frontière $\{0,1\}$ ne l'est pas, et
2. $[-1,0[\cup]0,1]$ n'est pas connexe mais son adhérence $[-1,1]$ l'est.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, les deux demi-cercles $x^2+y^2=1, y\geq 0$ et $x^2+y^2=1, y\leq 0$ sont connexes mais leur intersection, la paire $\{(1,0),(-1,0)\}$, ne l'est pas.
4. Dans $\mathbb{R}$, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont connexes mais pas leur réunion.

Exercice. (4 pts)

1. Dans $\mathbb{R}^2$, $A=$ une demi-droite *ouverte* et $B=$ une droite sont homéomorphes, mais A^c est connexe tandis que B^c ne l'est pas.
2. Idem dans $\mathbb{R}$ pour $A=[0,+\infty[$ et $B=[0,1[$.

Exercice. (2 pts) Dans un espace métrisable, une partie est fermée dès qu'elle est stable par limites de suites. Il suffit donc de montrer que toute limite uniforme f d'une suite d'applications uniformément continues $f_n:(E,d)\to(F,d')$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon>0$. Par convergence uniforme, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N$ et tout $z\in E$, $d'(f_n(z),f(z))\leq\varepsilon/3$. Par continuité uniforme de f_N, il existe $\delta>0$ (dépendant de N mais N est maintenant fixé) tel que, pour tous $x,y\in E$ vérifiant $d(x,y)<\delta$, on ait $d'(f_N(x),f_N(y))\leq\varepsilon/3$. On a alors, pour tous $x,y\in E$ vérifiant $d(x,y)<\delta$:

$$d'(f(x),f(y))\leq d'(f(x),f_N(x))+d'(f_N(x),f_N(y))+d'(f_N(y),f(y))\leq\varepsilon.$$

L'existence, pour tout $\varepsilon>0$, d'un tel δ, prouve que f est uniformément continue.
Exercice. (1+3+1=5 pts)

1. Si F est séparé et si $f:E\to F$ est continue alors son graphe est fermé.
2. Supposons que F est compact et que le graphe G de f est fermé, et montrons qu'alors f est continue en tout point x de E : soit V un ouvert de F contenant $f(x)$, il s'agit de trouver dans E un ouvert U contenant x et tel que $f(U)\subset V$. Pour tout $y\in F$ n'appartenant pas à V, on a $y\neq f(x)$, donc (x,y) n'appartient pas au fermé G, donc il existe dans $E\times F$ un ouvert élémentaire $U_y\times V_y$, disjoint de G et contenant ce couple. Le complémentaire de V est compact (car fermé dans F) et recouvert par les ouverts V_y donc par un nombre fini d'entre eux : $V_{y_1},\dots,V_{y_n}$. L'intersection finie $U=U_{y_1}\cap\ldots\cap U_{y_n}$ répond alors au problème.

   Sous l'hypothèse supplémentaire que E est à bases dénombrables de voisinages (ce qui est courant puisqu'il suffit que E soit métrisable), f est continue dès qu'elle est séquentiellement continue, et l'on peut alors démontrer plus intuitivement cette continuité, en utilisant que dans F (compact), toute suite a au moins une valeur d'adhérence et si elle n'en a qu'une alors elle converge : si $x_n\to x$ dans E alors pour toute valeur d'adhérence ℓ de $(f(x_n))$, le couple (x,ℓ) est une valeur d'adhérence de la suite des $(x_n,f(x_n))$ donc (puisque cette suite est à valeurs dans G qui est fermé) ce couple appartient à G c'est-à-dire que $\ell=f(x)$, ce qui prouve bien que $f(x_n)\to f(x)$.
3. L'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ si $x\leq 0$ et $f(x)=1/x$ si $x>0$ est discontinue en 0, bien que son graphe soit fermé.

Exercice. (1+0,5+2=3,5 pts)

1. Pour *toute* $f\in\mathcal{C}([0,1])$ *(non nécessairement dérivable)*, l'application $T(f):[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

   $$T(f)(x)=1+\int_0^x f(t-t^2)\ \mathrm{d}t$$

   répond au problème.
2. $S=T-T(0)$ est donnée par $S(f)(x)=\int_0^x f(t-t^2)\ \mathrm{d}t$ donc linéaire, par linéarité de l'intégrale.

3. L'application affine $T \circ T$ est une contraction car l'application linéaire associée $S \circ S$ est de norme $\leq 1/6 < 1$. En effet, pour toute $f \in \mathcal{C}([0,1])$

$$(S \circ S)(f)(x) = \int_0^x S(f)(t-t^2)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(s-s^2)\ \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

donc en notant $\| \ \|$ la norme sur $\mathcal{C}([0,1])$,

$$\|(S \circ S)(f)\| \leq \int_0^1 \int_0^{t-t^2} \|f\|\ \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \|f\| \int_0^1 (t-t^2)\ \mathrm{d}t = \|f\|/6.$$

On en déduit que T – bien que non contractante car $\|S\| = 1$ – a un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe une unique application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout x, $f'(x) = f(x - x^2)$.

Exercice. (0,5+1+2=3,5 pts)

1. L'application A est injective car linéaire et de noyau $\{0\}$.
2. L'application linéaire $B : \mathrm{im}(A) \to E, A(x) \mapsto x$ est continue (de norme $\leq 1/\varepsilon$) car $\forall y \in \mathrm{im}(A) \quad \|B(y)\| \leq \|y\|/\varepsilon$, puisque $\forall x \in E \quad \|B(A(x))\| = \|x\| \leq \|A(x)\|/\varepsilon$.
3. Si l'application linéaire A est aussi continue, $\mathrm{im}(A)$ est donc uniformément isomorphe à E (c'est-à-dire non seulement homéomorphe, mais par une bijection qui, dans les deux sens, est uniformément continue). Par conséquent, si de plus E est complet, $\mathrm{im}(A)$ est complet donc fermé dans F.

Exercice. (2+1+1+2=6 pts)

1. D'après le théorème de représentation de F. Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall y \in H \quad L(y) = \langle f, y \rangle$. De même, pour tout $x \in H$, puisque l'application $y \mapsto a(x,y)$ est une forme linéaire continue (de norme $\leq \|\!|a|\!\|\|x\|$) il existe un unique $A(x) \in H$ tel que $\forall y \in H \quad a(x,y) = \langle A(x), y \rangle$.
   L'application A ainsi définie est linéaire car d'une part $\forall x, z \in H \quad A(x+z) = A(x) + A(z)$ puisque $\forall y \in H \quad \langle A(x+z), y \rangle = a(x+z, y) = a(x,y) + a(z,y) = \langle A(x), y \rangle + \langle A(z), y \rangle = \langle A(x) + A(z), y \rangle$ et d'autre part (par un raisonnement analogue) $\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$. Elle est continue car $\forall x \in H \quad \|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x) \rangle = a(x, A(x)) \leq \|\!|a|\!\|\|x\|\|A(x)\|$ donc $\|A(x)\| \leq \|\!|a|\!\|\|x\|$.
2. Pour tout $x \in H$, $\varepsilon\|x\|^2 \leq a(x,x) = \langle A(x), x \rangle \leq \|A(x)\|\|x\|$ donc $\varepsilon\|x\| \leq \|A(x)\|$. L'exercice précédent s'applique (H est complet) donc A est injective et d'image fermée.
3. Pour tout $x \in (\mathrm{im}(A))^\perp$, $0 = \langle A(x), x \rangle = a(x,x) \geq \varepsilon\|x\|^2$ donc $x = 0$.
4. D'après les deux questions précédentes, A est bijective. Or un $x \in H$ vérifie $\forall y \in H \quad L(y) = a(x,y)$ si et seulement si $\forall y \in H \quad \langle f, y \rangle = \langle A(x), y \rangle$, ce qui équivaut à $f = A(x)$. Il en existe donc un unique : $x = A^{-1}(f)$.

11.11 Examen de janvier 2014

Énoncé

Exercice 1

I. Soit (E,d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et non identiquement nulle. Soit $a \in E$ tel que $\varphi(a) > 0$. On se propose d'établir la propriété $\mathcal{P}$ suivante : il existe $a' \in E$ tel que

i) $d(a, a') \leq \frac{2}{\varphi(a)}$

ii) $\varphi(a') \geq \varphi(a)$

iii) $\varphi(x) \leq 2\varphi(a')$ pour tout $x \in B(a', \frac{1}{\varphi(a')})$.

1) Montrer que si $\mathcal{P}$ n'est pas vraie alors il existe $a_1 \in E$ tel que $d(a, a_1) \leq \frac{1}{\varphi(a)}$ et $\varphi(a_1) \geq 2\varphi(a) > 0$.
2) On suppose qu'il existe $k+1$ points de E : $a_0, a_1, \cdots, a_k$ tels que $a = a_0$, $d(a_j, a_{j+1}) \leq \frac{1}{2^j \varphi(a_0)}$ et $\varphi(a_{j+1}) \geq 2\varphi(a_j)$ pour $0 \leq j \leq k-1$. Vérifier que $d(a_0, a_k) \leq \frac{2}{\varphi(a_0)}$. En déduire que si $\mathcal{P}$ n'est pas vraie alors il existe $a_{k+1} \in E$ tel que $\varphi(a_{k+1}) \geq 2\varphi(a_k) > 0$ et $d(a_{k+1}, a_k) \leq \frac{1}{2^k \varphi(a_0)}$.
3) Montrer, en procédant par l'absurde, que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

II. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_n |f'_n(0)| = +\infty$.

1) Donner un exemple où la suite $(f_n)_n$ n'est pas équicontinue en 0.
2) En appliquant la propriété $\mathcal{P}$ à la fonction $\varphi(x) := |f'_n(x)|$ montrer qu'il existe des suites de réels $(x_n)_n$ et $(\rho_n)_n$ tels que $\rho_n > 0$, $\lim_n x_n = \lim_n \rho_n = 0$ et $(f_n(x_n + \rho_n x))_n$ est équicontinue en tout point de $|x| < 1$.

Rappel. La suite $(f_n)_n$ est dite équicontinue en x_0 si et seulement si :
$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ pour tout n et tout x tel que $|x - x_0| < \eta$.

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique compact et et $f : E \to E$ une application continue telle que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ pour tout x et tout y de E. Pour tout entier $n \geq 1$ on note f^n l'itérée n-ième de f (c'est à dire $f^{n+1} = f \circ f^n$)

1) Montrer que f est injective et que son image est fermée dans E.
2) i. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe une sous-suite $(f^{n_k}(x))_k$ qui est convergente puis en déduire l'existence d'une suite $(f^{p_k}(x))_k$ qui converge vers x.
   ii. Montrer que f est surjective.
   iii. Montrer que f est une isométrie (c'est à dire que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout x et tout y de E).
3) Soit $g : E \to E$ telle que $d(g(x), g(y)) \leq d(x, y)$ pour tout x et tout y de E. Montrer que si g est bijective alors g est une isométrie.

Exercice 3

Soient (K, d) un espace métrique compact et $\big(C(K), \|\ \|_\infty\big)$ l'espace des fonctions continues sur K muni de la norme de la convergence uniforme $\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$. Soit λ une forme linéaire continue sur $\big(C(K), \|\ \|_\infty\big)$. Pour tout $\varphi \in C(K)$ on note $\langle \lambda, \varphi \rangle$ la valeur prise par λ en φ. Soit $f(t, x)$ une fonction continue sur $[0, 1] \times K$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\tfrac{k}{N}, x\right).$$

1) Montrer que les fonctions $t \mapsto \langle \lambda, f(t, \cdot) \rangle$ et $x \mapsto \int_0^1 f(t, x)dt$ sont respectivement continues sur $[0, 1]$ et K.
2) En admettant que la suite de fonctions S_N converge uniformément vers $\int_0^1 f(t, x)dt$ sur K, montrer que $\langle \lambda, \int_0^1 f(t, \cdot)dt \rangle = \int_0^1 \langle \lambda, f(t, \cdot) \rangle dt$.

Corrigé

Exercice 1

I.

1) Si $\mathcal{P}$ n'est pas vraie alors pour tout $a' \in E$, i), ii) et iii) ne sont pas simultanément vrais, en particulier pour $a' = a$, iii) est faux (puisque i) et ii) sont vrais), c'est-à-dire qu'il existe $x \in B(a, 1/\varphi(a))$ tel que $\varphi(x) > 2\varphi(a)$.
2) $d(a_0, a_k) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(a_j, a_{j+1}) \leq \frac{1}{\varphi(a_0)} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} < \frac{2}{\varphi(a_0)}$.
   Si $\mathcal{P}$ n'est pas vraie alors pour tout $a' \in E$, i), ii) et iii) ne sont pas simultanément vrais, en particulier pour $a' = a_k$, iii) est faux (puisque ii) est vrai d'après les hypothèses, et qu'on vient

de montrer que i) l'est aussi), donc il existe $x \in E$ tel que $d(x, a_k) < 1/\varphi(a_k)$ ($\leq \frac{1}{2^k\varphi(a_0)}$ d'après les hypothèses) tel que $\varphi(x) > 2\varphi(a_k)$.

3) Si $\mathcal{P}$ n'est pas vraie alors, en posant $a_0 = a$ et en appliquant la question 2, on construit par récurrence une suite $(a_n)_n$ telle que $d(a_k, a_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k\varphi(a)}$ (donc la suite est de Cauchy) et $\varphi(a_k) \geq 2^k\varphi(a)$ (donc $\varphi(a_k) \to +\infty$). C'est impossible car E est complet et φ est continue.

II.

1) $f_n(x) := nx$ vérifie $f_n'(0) = n \to +\infty$ et n'est pas équicontinue en 0 car par exemple pour $\varepsilon = 1$, il n'existe pas de $\eta > 0$ tel que pour tout entier n, $\forall x \in]-\eta, \eta[$ $|nx| < 1$ c'est-à-dire tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\eta \leq 1/n$.

2) La fonction $\varphi := |f_n'|$ est continue de $E := \mathbb{R}$ (complet) dans $\mathbb{R}^+$, et non nulle en $a := 0$ pour tout n supérieur à un certain N (puisque $|f_n'(0)| \to +\infty$). On peut alors lui appliquer la partie I, ce qui donne (pour tout $n \geq N$) : il existe un réel x_n tel que
   i) $|x_n| \leq \frac{2}{|f_n'(0)|}$ (donc $x_n \to 0$),
   ii) $|f_n'(x_n)| \geq |f_n'(0)|$ (donc $f_n'(x_n) \neq 0$ et $\rho_n := \frac{1}{|f_n'(x_n)|} \to 0$) et
   iii) $\forall y \in]x_n - \rho_n, x_n + \rho_n[$ $|f_n'(y)| \leq \frac{2}{\rho_n}$.

   La propriété iii) assure que chacune des fonctions $x \mapsto f_n(x_n + \rho_n x)$ (pour $n \geq N$) est 2-lipschitzienne sur $[-1, 1]$. L'ensemble de ces fonctions est donc équicontinu (uniformément) sur $[-1, 1]$.

Exercice 2

1) f est injective car $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) = 0$. D'autre part, son image est compacte car f est continue de E (compact) dans E (séparé). Cette image est donc fermée dans E (séparé).

2) i. Dans E (compact), il existe une sous-suite convergente $\left(f^{n_k}(x)\right)_k$. Soit $p_k := n_{k+1} - n_k$, alors $d\left(f^{p_k(x)}, x\right) \leq d\left(f^{n_{k+1}}(x), f^{n_k}(x)\right) \to 0$ donc $f^{p_k(x)} \to x$.

   ii. Ainsi, tout $x \in E$ est limite d'une suite du fermé $\mathrm{Im}(f)$ donc $x \in \mathrm{Im}(f)$. Donc f est surjective.

   iii. $E \times E$ est compact pour la distance $\delta((x, y), (x', y')) := \max(d(x, x'), d(y, y'))$. La fonction $F : E \times E \to E \times E, (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$ est continue et vérifie encore $\delta(F(x, y), F(x', y')) \geq \delta((x, y), (x', y'))$. D'après i., pour tous $x, y \in E$, il existe donc une extractrice commune $(p_k)_k$, telle que $f^{p_k(x)} \to x$ et $f^{p_k(y)} \to y$. Or pour $k \neq 0$ (donc $p_k > 0$) $d\left(f^{p_k(x)}, f^{p_k(y)}\right) \geq d(f(x), f(y))$. On en déduit que $d(x, y) \geq d(f(x), f(y))$. Cette inégalité prouve que f est non seulement "dilatante" (par hypothèse) mais isométrique.

3) g est continue (car 1-lipschitzienne) et bijective de E (compact) dans E (séparé), donc $f := g^{-1}$ est continue. f est de plus "dilatante" donc d'après ce qui précède, f est isométrique. Par conséquent, g aussi.

Exercice 3

1) La fonction $F : t \mapsto \langle \lambda, f(t, \cdot) \rangle$ est continue sur $[0, 1]$, comme composée de λ par la fonction $t \mapsto f(t, \cdot)$, qui est continue de $[0, 1]$ dans $(C(K), \| \|_\infty)$, c'est-à-dire que la continuité de $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est uniforme par rapport à x, par compacité de K (elle est même uniforme par rapport à (t, x), par compacité de $[0, 1] \times K$).

   De même, la fonction $x \mapsto \int_0^1 f(t, x)dt$ est continue sur K, comme composée de l'intégration sur $[0, 1]$ (forme linéaire continue sur $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$, de norme 1) par la fonction $x \mapsto f(t, x)$, qui est continue de K dans $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$ par compacité de $[0, 1]$.

2) Admettons que $S_N \to G$ dans $(C(K), \| \|_\infty)$, avec $G(x) = \int_0^1 f(t, x)\mathrm{d}t$. Alors $\langle \lambda, S_N \rangle \to \langle \lambda, G \rangle$. Or (par linéarité de λ et propriété des sommes de Riemann) $\langle \lambda, S_N \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(\frac{k}{N}) \to \int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle \lambda, f(t, \cdot) \rangle \mathrm{d}t$ et (par définition de G) $\langle \lambda, G \rangle = \langle \lambda, \int_0^1 f(t, \cdot)\mathrm{d}t \rangle$, d'où l'égalité voulue.

11.12 Partiel de novembre 2013

Énoncé (9h – 12h)

Cinq exercices (2 points par exercice)

1. Soient X un espace topologique et A une partie de X, munie de la topologie induite. Montrer que si A est un ouvert de X, les ouverts de A sont exactement les ouverts de X inclus dans A.
2. Démontrer qu'une partie A d'un espace topologique est de frontière vide si et seulement si A est à la fois un ouvert et un fermé.
3. Soient X, Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y. Montrer que si $X = F \cup G$ avec F et G fermés et si les restrictions de f à F et G sont continues alors f est continue.
4. Redémontrer le théorème suivant (vu en cours dans un contexte plus général) : dans un espace métrisable, toute valeur d'adhérence d'une suite est limite d'une sous-suite.
5. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la distance d' sur E définie par

$$d'(x, y) = \min(2, d(x, y))$$

est uniformément équivalente à d. (On ne demande pas de démontrer que d' est bien une distance.)

Problème 1 (5 points)

Soit X un espace métrisable (rappel : un espace topologique X est dit métrisable s'il existe une distance "compatible" avec sa topologie, c'est-à-dire telle que la topologie de X coïncide avec la topologie associée à cette distance).

1. Montrer que si toute suite dans X admet une sous-suite convergente alors X est complet pour toute distance compatible.

   Le but de la suite est de prouver la réciproque, par contraposée. On se donne donc :
   – une suite $(x_n)_n$ dans X sans sous-suite convergente et
   – une distance d sur X compatible et majorée par 2 (cf. exercice 5),
   et l'on cherche à construire une distance d' sur X, topologiquement équivalente à d, et telle que (X, d') ne soit pas complet.

   Soient $s : X \to \mathbb{R}$ et $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ définies par (pour tous $x, y \in X$) :

$$s(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} + d(x, x_n) \right)$$

   et

$$d'(x, y) = \min(s(x), s(y))d(x, y) + |s(x) - s(y)|.$$

2. Montrer que s est 1-lipschitzienne.
3. En déduire que $d' \leq 4d$.
4. Montrer que s est à valeurs strictement positives.
5. En déduire que pour toute suite $(y_n)_n$ et tout y dans X,

$$\text{si } d'(y_n, y) \to 0 \text{ alors } d(y_n, y) \to 0.$$

6. Montrer que d' est une distance sur X.
7. Déduire de questions 3 et 5 que d' est topologiquement équivalente à d.

8. Montrer que pour tout entier $n > 0$, $s(x_n) \leq 1/n$.
9. En déduire que $(x_n)_n$ est de Cauchy pour d'.
10. Déduire des questions 9 et 7 que (X, d') n'est pas complet.

Problème 2 (5 points)

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des intervalles réels de la forme $[a, b[$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la topologie $\mathcal{S}$ dont $\mathcal{B}$ est une base est plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $\mathcal{S}$ est séparée.
4. Montrer que $\mathcal{S}$ est séparable.
5. En déduire que $\mathcal{S}$ n'est pas la topologie discrète.
6. Montrer que $\mathcal{S}$ est à bases dénombrables de voisinages.
7. Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de la topologie produit de $\mathcal{S}$ par elle-même, montrer que la droite $D = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé.
8. Montrer que la topologie induite sur D est la topologie discrète.
9. En déduire que $\mathcal{S}$ n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
10. Déduire de ce qui précède (en précisant les numéros des questions utilisées) que $\mathcal{S}$ n'est pas métrisable.

Corrigé

Cinq exercices

1. Soit A un ouvert de X. Tout ouvert de A est de la forme $U = O \cap A$ avec O ouvert de X. Un tel U est inclus dans A, et ouvert dans X (comme intersection de deux ouverts de X). Réciproquement, soit U un ouvert de X inclus dans A, alors U est égal à $U \cap A$ donc c'est un ouvert de A.
2. On a toujours $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$, et A est ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$, et fermée si et seulement si $\overline{A} = A$. Si $\mathring{A} = A = \overline{A}$ alors $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus A = \varnothing$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$ alors $\mathring{A} = \overline{A}$ donc $\mathring{A} = A = \overline{A}$.
3. Notons $f_F : F \to Y$ et $f_G : G \to Y$ les deux restrictions. Pour tout fermé H de Y, $f^{-1}(H) = (f^{-1}(H) \cap F) \cup (f^{-1}(H) \cap G) = f_F^{-1}(H) \cup f_G^{-1}(H)$. L'ensemble $f_F^{-1}(H)$ est un fermé de F donc il est de la forme $F \cap K$ avec K fermé dans X. Donc $f_F^{-1}(H)$ est aussi fermé dans X (comme intersection de fermés). De même, $f_G^{-1}(H)$ est un fermé de X. Ainsi, l'image réciproque par f de tout fermé H de Y est un fermé de X (comme réunion de deux fermés) donc f est continue.
4. Soient X un espace métrisable et d une distance qui induit sa topologie. Dans X, si ℓ est une valeur d'adhérence de $x = (x_n)_n$ alors pour tout $k > 0$, $x_n \in B(\ell, 1/k)$ pour une infinité de valeurs de n. Ceci permet de construire par récurrence sur k une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de x telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k > n_{k-1}$ (pour que $(x_{n_k})_k$ soit bien une sous-suite) et $x_{n_k} \in B(\ell, 1/k)$ (pour que cette sous-suite converge vers ℓ).
5. On a $d' \leq d$ donc l'application identité de (E, d) dans (E, d') est uniformément continue (car 1-lipschitzienne). Montrons que sa réciproque est aussi uniformément continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\eta = \min(2, \varepsilon)$ on a bien : $\eta > 0$ et pour tous $x, y \in E$ tels que $d(x, y) < \eta$, $d'(x, y) < \varepsilon$ (car $d(x, y) < \eta \leq 2$ donc $d'(x, y) = d(x, y) < \eta \leq \varepsilon$).

Problème 1 : théorème de Niemytzki-Tychonoff

1. Supposons que toute suite dans X admet une sous-suite convergente. En particulier, toute suite de Cauchy x pour une distance compatible d admet une sous-suite y convergente. Comme x est de Cauchy, elle converge donc (vers la même limite que y). Ceci prouve que (X, d) est complet.

2. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} + d(x, x_n) \leq \frac{1}{n} + d(y, x_n) + d(x, y)$$

donc (en prenant la borne inférieure des deux côtés) $s(x) \leq s(y) + d(x, y)$. De même, $s(y) \leq s(x) + d(y, x)$. Donc $s(x) - s(y)$ et son opposé sont majorés par $d(x, y) = d(y, x)$, donc $|s(x) - s(y)| \leq d(x, y)$.

3. Puisque $d \leq 2$, on a $s \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2$ donc d'après la question 2, $d' \leq 3d (\leq 4d)$.

4. Pour tout $x \in X$, les $\frac{1}{n} + d(x, x_n)$ sont strictement positifs. On en déduit que $s(x) \geq 0$, mais aussi que $s(x) \neq 0$ car aucune sous-suite $\left(\frac{1}{n_k} + d(x, x_{n_k})\right)_k$ ne converge vers 0, sinon on aurait $d(x, x_{n_k}) \to 0$ c'est-à-dire $x_{n_k} \to x$, ce qui est exclu par hypothèse.

5. Si $\min(s(y_n), s(y)) d(y_n, y) + |s(y_n) - s(y)| \to 0$ alors les deux termes de cette somme tendent vers 0 ; le second donne $s(y_n) \to s(y)$ donc $\min(s(y_n), s(y)) \to s(y) \neq 0$ (d'après la question 4) et le premier donne alors $d(y_n, y) \to 0$.

6. On a évidemment $d'(x, y) = d'(y, x)$ et $d'(x, x) = 0$.
Si $d'(x, y) = 0$ alors (d'après la question 5 appliquée à $y_n = x$) $d(x, y) = 0$ donc $x = y$.
Soient $x, y, z \in X$. Notons $a = s(x), b = s(y), c = s(z)$ et vérifions que

$$\min(a, c) d(x, z) + |a - c| \leq \min(a, b) d(x, y) + \min(b, c) d(y, z) + |a - b| + |b - c|.$$

   – Si $\min(a, c) \leq b$, l'inégalité voulue résulte de $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$ et de $\min(a, b, c) d(x, z) \leq \min(a, b, c)(d(x, y) + d(y, z)) \leq \min(a, b) d(x, y) + \min(b, c) d(y, z)$.
   – Si $b \leq c \leq a$, on a bien $cd(x, z) + (a - c) \leq bd(x, y) + bd(y, z) + (a - b) + (c - b)$ puisque $c(2 - d(x, z)) \geq b(2 - d(x, z)) \geq b(2 - d(x, y) - d(y, z))$.
   – Si $b \leq a \leq c$, le calcul est analogue.

7. D'après la question 3, l'application identité est continue de (E, d) dans (E, d') (et même 4-lipschitzienne). D'après la question 5, elle est aussi continue de (E, d') dans (E, d) (car séquentiellement continue).

8. Pour tout entier $k > 0$, $s(x_n) \leq 1/k + d(x_n, x_k)$, en particulier pour $k = n$.

9. Pour tous entiers $m \geq n > 0$, $d'(x_m, x_n) \leq \frac{1}{n} d(x_m, x_n) + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{n}$.

10. Pour la distance d', la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy mais (par hypothèse sur cette suite et puisque d' est compatible) aucune de ses sous-suites n'a de limite, en particulier cette suite elle-même ne converge pas.

Problème 2 : droite de Sorgenfrey

1. La famille $\mathcal{B}$ recouvre $\mathbb{R}$ (par exemple : $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$) et est stable par intersections finies, donc c'est une base de topologie.

2. Les intervalles $]a, b[$ avec $a < b$ forment une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et chacun d'entre eux est un ouvert de $\mathcal{S}$ (car $]a, b[= \cup_{a<c<b} [c, b[$).

3. Si a, b sont deux réels distincts, il existe deux ouverts de $\mathbb{R}$ (au sens usuel donc aussi pour $\mathcal{S}$) disjoints, dont l'un contient a et l'autre b.

4. L'ensemble des rationnels est dénombrable et rencontre tout intervalle $[a, b[$ avec $a < b$, donc rencontre aussi tout ouvert non vide de $\mathcal{S}$, si bien qu'il est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$.

5. Pour la topologie discrète sur $\mathbb{R}$, la seule partie dense est $\mathbb{R}$, qui n'est pas dénombrable.
6. Tout réel a possède une base dénombrable de voisinages pour $\mathcal{S}$: par exemple les $[a, a+1/n[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
7. La droite $D = +^{-1}(\{0\})$ est fermée pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$ donc aussi pour la topologie (plus fine) produit de $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}$.
8. Pour tout $(a, b) \in D$, $\{(a, b)\} = ([a, a+1[\times[b, b+1[) \cap D$ donc dans D muni de la topologie induite, tout singleton est ouvert.
9. Si $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ était à base dénombrable d'ouverts, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ le serait aussi donc son sous-espace D aussi.
10. D'après les questions 4 et 9, $\mathcal{S}$ n'est pas métrisable.

Complément au corrigé (erreurs trop fréquentes)

- Exercice 3 : les ouverts de F et G ne sont pas des ouverts de X. Il faut passer par la caractérisation de la continuité par les images réciproques de fermés, et profiter du fait que, F et G étant des fermés de X, leurs fermés, eux, sont bien des fermés de X (c'est l'analogue, pour les fermés, d'une partie de l'exercice 1).
- Problème 1, question 4 : l'inf d'une suite à valeurs > 0 peut très bien être nul.
- Problème 1, question 5 : notons $a_n = \min(s(y_n), s(y))$ et $b_n = d(y_n, y)$. Sachant que $a_n b_n \to 0$, il ne suffit pas de remarquer que $a_n > 0$ pour affirmer que $b_n \to 0$. (Exemple : $a_n = 1/n, b_n = 1$.) Il faut montrer qu'ici, $a_n \to s(y)$ (en utilisant que $|s(y_n) - s(y)| \to 0$), et utiliser ensuite que $s(y) \neq 0$.
- Problème 1, question 8 : dans la définition $s(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} + d(x, x_n)\right)$, n est une "variable muette", qu'on peut remplacer partout par n'importe quelle lettre, par exemple k. Il faut absolument faire ce remplacement pour exprimer $s(x_n)$, qui n'est pas égal à $\inf_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} + d(x_n, x_n)\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = 0$ mais à $\inf_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{k} + d(x_n, x_k)\right)$.
- Problème 2, question 1 : la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ n'intervient pas ici. Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de $\mathbb{R}$ est *une base de topologie* sur l'*ensemble* $\mathbb{R}$ si et seulement si ... (cf. cours).
- Problème 2, question 2 : il ne s'agit pas de prouver une inclusion entre des intervalles de $\mathbb{R}$ (donc des parties de $\mathbb{R}$) mais entre deux *ensembles de parties* de $\mathbb{R}$: l'ensemble $\mathcal{S}$ et l'ensemble des ouverts usuels de $\mathbb{R}$. Pour montrer que tout ouvert usuel de $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{S}$, il suffit de le montrer pour les ouverts d'une base de la topologie usuelle. Il suffit donc de montrer que tout intervalle ouvert $]a, b[$ appartient à $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que $]a, b[$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

11.13 Devoir maison de décembre 2013

Énoncé

Tous les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie considérés sont munis de leur topologie usuelle (définie à partir de n'importe quelle norme) et toutes leurs parties sont munies de la topologie induite.

Pour un ensemble K fixé et stable par une application f, $\mathrm{Fix}(f)$ désignera l'ensemble des points de K fixes par f.

Exercice 1 : point fixe commun dans un compact

Soient K un compact et G un ensemble d'applications continues de K dans K.

1. Montrer que pour tout $f \in G$, $\mathrm{Fix}(f)$ est fermé.
2. En déduire que si pour toute partie finie F de G, $\cap_{f\in F}\mathrm{Fix}(f)$ est non vide, alors $\cap_{f\in G}\mathrm{Fix}(f)$ est non vide.

Exercice 2 : enveloppe convexe d'un compact en dimension finie

Dans un espace affine, on appelle *enveloppe convexe* d'une partie non vide A l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (c'est-à-dire de tous les barycentres à coefficients positifs ou nuls) de familles finies de points de A (c'est le plus petit convexe contenant A). On admettra le *théorème de Carathéodory* : si l'espace est de dimension m, tout point de cette enveloppe est combinaison convexe de $m+1$ points de A. En déduire que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, l'enveloppe convexe de tout compact non vide est compacte.

Partie 1 : théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Les questions 5, 6 et 7 sont facultatives.

Soient K un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : E \to E$ une application affine continue qui laisse K stable.

On pose $C := (\mathrm{id} - f)(K)$ et on choisit un point $x \in K$.

1. Montrer que C est convexe et en déduire que pour tout entier $n > 0$, le point $x_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{id} - f)\left(f^k(x)\right)$ appartient à C.
2. Montrer que C est compact.
3. Simplifier l'expression de x_n et en déduire que $x_n \to 0$.
4. En déduire que le compact $K_1 := \mathrm{Fix}(f)$ est non vide.
5. Montrer que K_1 est convexe.
6. Déduire de ce qui précède (par récurrence) que pour toute suite finie $(f_1, \ldots, f_n)$ d'applications affines continues de E dans E qui commutent deux à deux et laissent K stable, les f_i ont un point fixe commun dans K.
7. En déduire (grâce à l'exercice 1) que pour *tout* ensemble G d'applications affines continues de E dans E qui commutent deux à deux et laissent K stable, les éléments de G ont un point fixe commun dans K.

Partie 2 : un théorème de point fixe de Kakutani

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, K un compact convexe non vide de E et G un sous-groupe compact de $GL(E)$, dont chaque élément laisse K stable. On veut montrer qu'il existe dans K un point fixe commun à tous les éléments de G.

On fixe une norme euclidienne $\|\ \|$ sur E et pour tout $x \in E$, on pose $N(x) := \sup_{g\in G}\|g(x)\|$.

1. Montrer que ce sup est toujours atteint : $\forall x \in E, \exists g \in G, N(x) = \|g(x)\|$.
2. Vérifier que N est une norme sur E.
3. Montrer que cette norme est G-invariante, c'est-à-dire que
$$\forall x \in E, \forall g \in G, N(g(x)) = N(x).$$
4. On dit que des vecteurs non nuls sont *colinéaires et de même sens* s'ils sont multiples les uns des autres par des réels positifs.
   On dit qu'une norme ν est *strictement convexe* si pour tous vecteurs non nuls $x_1, \ldots, x_n$ tels que $\nu(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n \nu(x_i)$, les x_i sont colinéaires et de même sens.
   Sachant que la norme euclidienne $\|\ \|$ est strictement convexe, montrer que N l'est aussi. (Indication : pour $x_1, \ldots, x_n$ non nuls tels que $N(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n N(x_i)$, considérer un $g \in G$ tel que $N(\sum_{i=1}^n x_i) = \|g(\sum_{i=1}^n x_i)\|$ et montrer que les $g(x_i)$ sont colinéaires et de même sens.)
5. Montrer que pour toute famille finie $(g_1, \ldots, g_n)$ d'éléments de G, $\cap_{i=1}^n \mathrm{Fix}(g_i) \neq \varnothing$. (Indication : montrer que leur moyenne $f := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i$ laisse K stable donc – d'après la question 4 de la partie 1 – fixe un point $y \in K$ et déduire des deux questions précédentes que les $g_i(y)$ sont égaux entre eux, donc tous égaux à $f(y) = y$.)

6. Conclure grâce à l'exercice 1.

Partie 3 : sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Soit H un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. On veut montrer que H est, à conjugaison près, un sous-groupe du groupe compact $O_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice S, symétrique et définie positive, telle que les éléments de H soient des isométries pour la norme euclidienne $\| \ \|_S$ sur $\mathbb{R}^n$ associée ($\|X\|_S := \sqrt{{}^tXSX}$).

1. Soit $E := M_n(\mathbb{R})$. On définit, pour tout $A \in H$, $f_A : E \to E$ par :
$\forall M \in E, f_A(M) :={}^t AMA$, puis on pose $G := \{f_A \mid A \in H\}$.
Montrer que G est un sous-groupe compact de $GL(E)$.
2. Soient $C := \{{}^tBB \mid B \in H\} \subset E$ et K son enveloppe convexe. Déduire de l'exercice 2 que K est compact.
3. Montrer que K est stable par tout élément de G.
4. Déduire alors de la partie 2 qu'il existe une matrice $M \in K$ telle que
$\forall A \in H, {}^tAMA = M$.
5. Conclure.

Corrigé, noté sur 30 pts (+ 3 hors barème),
avec homothétie à la baisse si les copies sont "trop bonnes"

Exercice 1 : point fixe commun dans un compact (3 pts)

1. (2 pts) Les deux applications f et id_K sont continues et à valeurs dans K qui est séparé, donc l'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points où elles coïncident est fermé (prop. 2.42 du poly).
2. (1 pt) Le compact K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, formulée en termes de fermés (prop. 4.2 du poly).

Exercice 2 : enveloppe convexe d'un compact en dimension finie (4 pts)

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^m$. D'après le théorème de Carathéodory, son enveloppe convexe est l'ensemble des $\sum_{k=0}^m t_k x_k$ quand $x = (x_0, \ldots, x_m)$ parcourt K^{m+1} et $t = (t_0, \ldots, t_m)$ parcourt l'ensemble Δ_m des $(m+1)$-uplets de réels positifs ou nuls de somme 1. C'est donc l'image de $\Delta_m \times K^{m+1}$ par $(t, x) \mapsto \sum_{k=0}^m t_k x_k$ (qui est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, séparé). Elle est donc compacte car $\Delta_m \times K^{m+1}$ est compact, comme produit fini de compacts. En effet, Δ_m est compact car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$, comme intersection de la sphère unité pour la norme $\| \ \|_1$ ($\|t\|_1 = \sum_{k=0}^m |t_k|$) et des $m+1$ demi-espaces fermés $p_k^{-1}(\mathbb{R}^+) = \{t \in \mathbb{R}^{m+1} \mid t_k \geq 0\}$.

Partie 1 : théorème du point fixe de Markov-Kakutani (7 pts + 3 hors barème)

1. (2 pts) C est convexe, comme image d'un convexe par l'application affine $\mathrm{id} - f$. Les points $f^k(x)$ appartiennent à K (car K est stable par f) donc leurs images par $\mathrm{id} - f$ appartiennent à C, donc l'équibarycentre x_n appartient au convexe C.
2. (1 pt) C est compact comme image continue d'un compact dans un séparé.
3. (2 pts) $x_n = \frac{1}{n}(x - f^n(x)) \to 0$ car la suite des $f^n(x) \in K$ est bornée.
4. (2 pts) $x_n \in C$ et $x_n \to 0$ donc $0 \in C$ (car C est fermé, comme compact dans un séparé), c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ tel que $0 = x - f(x)$, autrement dit $K_1 := \mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$.
5. (0,5 pt hb) Soit $z = tx + (1-t)y$ avec $x, y \in K_1$ et $t \in [0, 1]$. Alors $z \in K$ (car K est convexe) et comme f est affine, $f(z) = tf(x) + (1-t)f(y) = tx + (1-t)y = z$ donc $z \in K_1$.
6. (2 pts hb) Posons $K_0 = K$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $K_k = \mathrm{Fix}(f_1) \cap \mathrm{Fix}(f_2) \cap \ldots \cap \mathrm{Fix}(f_k)$. Ils sont compacts (cf. exercice 1, question 1). Montrons par récurrence qu'ils sont convexes et

non vides. Comme f_{k+1} commute aux f_i, elle laisse stable les $\mathrm{Fix}(f_i)$ donc laisse stable K_k. En appliquant les questions 4 et 5, on en déduit que si le compact K_k est convexe et non vide alors K_{k+1} aussi. Conclusion : $K_n \neq \varnothing$.

7. (0,5 pt hb) D'après la question ci-dessus, G vérifie les hypothèses de l'exercice 1, question 2, donc $\cap_{f\in G}\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$.

Partie 2 : un théorème de point fixe de Kakutani (8,5 pts)

1. (1 pt) Pour tout $x \in E$, l'application $G \to \mathbb{R}, g \mapsto \|g(x)\|$ est continue (comme composée). Comme G est un compact non vide, l'application atteint son sup.
2. (2 pts) N est à valeurs positives ou nulles, et finies d'après la question précédente. L'homogénéité et la séparation sont immédiates. Vérifions la sous-additivité. Soient $x, y \in E$; pour tout $g \in G$, $\|g(x+y)\| = \|g(x)+g(y)\| \leq \|g(x)\| + \|g(y)\| \leq N(x) + N(y)$ donc $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
3. (1 pt) Pour $g \in G$ fixé, quand h parcourt G, $k := h \circ g$ aussi, donc
$$N(g(x)) = \sup_{h\in G} \|h(g(x))\| = \sup_{k\in G} \|k(x)\| = N(x).$$
4. (2 pts) Soient $x_1, \ldots, x_n$ non nuls tels que $N(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n N(x_i)$ et (d'après la question 1) $g \in G$ tel que $N(\sum_{i=1}^n x_i) = \|g(\sum_{i=1}^n x_i)\|$. Alors
$$\sum_{i=1}^n \|g(x_i)\| \leq \sum_{i=1}^n N(x_i) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \left\|g\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n g(x_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|g(x_i)\|$$
donc$\|\sum_{i=1}^n g(x_i)\| = \sum_{i=1}^n \|g(x_i)\|$ donc les $g(x_i)$ sont colinéaires et de même sens donc (par linéarité de g^{-1}) les x_i aussi.
5. (2 pts) Puisque K est convexe et stable par les g_i, il est stable par f. Comme il est aussi supposé compact et non vide, il contient donc (d'après la question 4 de la partie 1) au moins un y fixe par f. Pour un tel y on a
$$nN(y) = N(ny) = N(nf(y)) = N\left(\sum_{i=1}^n g_i(y)\right) \leq \sum_{i=1}^n N(g_i(y)) = \sum_{i=1}^n N(y) = nN(y)$$
donc $N\left(\sum_{i=1}^n g_i(y)\right) = \sum_{i=1}^n N(g_i(y))$, si bien que les $g_i(y)$ sont colinéaires et de même sens. Comme de plus ils ont même N-norme, ils sont égaux, donc égaux à leur moyenne $f(y)$, elle-même égale à y. Ainsi, $g_i(y) = y$ pour tout i.
6. (0,5 pt) D'après la question ci-dessus, G vérifie les hypothèses de l'exercice 1, question 2, donc $\cap_{g\in G}\mathrm{Fix}(g) \neq \varnothing$.

Partie 3 : sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (7,5 pts)

1. (2 pts) $\forall A, B \in H$ $f_A \circ f_B = f_{BA} \in G$, en particulier (puisque $f_{I_n} = \mathrm{id}_E$) $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}} \in G$ et (puisque les f_A sont linéaires) $f_A \in GL(E)$. G est donc un sous-groupe de $GL(E)$. Il est compact, comme image du compact H dans l'espace séparé $\mathrm{End}(E)$ par une application continue. En effet, l'application $A \mapsto f_A$ est bien continue, par exemple comme composée de l'application diagonale $A \mapsto (A, A)$ et de l'application (bilinéaire sur un e.v. de dimension finie, donc continue) $E \times E \to \mathrm{End}(E), (A, B) \mapsto [E \to E, M \mapsto {}^{\mathrm{t}}AMB]$.
2. (2 pts) L'ensemble C est non vide et compact (comme image du compact G par l'application linéaire continue $\mathrm{End}(E) \to E, f \mapsto f(I_n)$), dans E qui est de dimension finie n^2. D'après l'exercice 2, son enveloppe convexe K est donc compacte.

3. (1 pt) Chaque $f \in G$ laisse stable C (car $f_A(f_B(I_n)) = f_{BA}(I_n)$), donc aussi K (car f est linéaire).
4. (0,5 pt) D'après la partie 2, K contient un point M fixe par tous les éléments de G.
5. (2 pts) M est un barycentre à coefficients positifs de matrices de la forme ${}^{\mathrm{t}}BB$ avec B inversible. Elle est donc symétrique et définie positive. Tout $A \in H$ est une isométrie pour la norme euclidienne $\| \ \|_M$ associée car

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \ \|AX\|_M^2 = {}^{\mathrm{t}}(AX)M(AX) = {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}AMA)X = {}^{\mathrm{t}}XMX = \ \|X\|_M^2.$$

11.14 Devoir surveillé d'octobre 2013

Énoncé (semi-continuité et espaces normaux)

L'exercice et le problème sont, formellement, indépendants.
Soit X un espace topologique.

Exercice : semi-continuité

Une application $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite
- semi-continue supérieurement si pour tout réel α, $f^{-1}([-\infty, \alpha[)$ est ouvert,
- semi-continue inférieurement si pour tout réel α, $f^{-1}(]\alpha, +\infty])$ est ouvert.

1. Démontrer que f est continue si et seulement si elle est semi-continue à la fois supérieurement et inférieurement.
2. Démontrer que pour toute partie A de X, la fonction indicatrice de A est semi-continue supérieurement si et seulement si A est fermé, et semi-continue inférieurement si et seulement si A est ouvert.
3. Démontrer que si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions semi-continues supérieurement sur X et

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \inf_{i\in I} f_i(x)$$

alors f est semi-continue supérieurement.

Problème : espaces normaux

On dit que X :
- est **quasi-normal** si pour tous fermés de X disjoints F et G, il existe deux ouverts de X disjoints U et V tels que F soit inclus dans U et G dans V ;
- vérifie le **lemme d'Urysohn** si pour tous fermés de X disjoints F et G, il existe une application continue de X dans le segment réel $[0, 1]$ (muni de sa topologie usuelle) qui vaut 0 sur F et 1 sur G ;
- vérifie le **théorème de prolongement de Tietze** si pour tout fermé F de X et toute application continue f de F dans un segment réel $[-M, M]$, il existe une application continue $g : X \to [-M, M]$ qui prolonge f.

Le principal objet de ce problème est de prouver que ces trois propriétés sont équivalentes.

Première partie : lemme d'Urysohn

1. Démontrer que si X vérifie le lemme d'Urysohn alors il est quasi-normal.
2. En déduire que tout espace métrisable est quasi-normal (expliciter, en fonction de F, G et de la distance, une application continue convenable).
3. Démontrer que X est quasi-normal si et seulement si, dans X :

$$F \text{ fermé} \subset O \text{ ouvert} \Rightarrow \exists U \text{ ouvert tel que } F \subset U \subset \overline{U} \subset O.$$

4. Dans l'ensemble des rationnels de $]0,1[$, on note D le sous-ensemble des fractions dyadiques, c'est-à-dire quotients d'un entier par une puissance entière de 2 (pour un tel rationnel r, on appelle valuation dyadique de r le plus petit entier n tel que r soit de la forme $k/2^n$ avec k entier).
   Déduire de la question précédente que si X est quasi-normal alors, pour tous fermé F et ouvert O de X tels que $F \subset O$, il existe une famille $(U_r)_{r\in D}$ d'ouverts tels que pour tous $r, s \in D$:
$$F \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset O$$
   et
$$r < s \Rightarrow \overline{U_r} \subset U_s.$$
   (Construire les U_r par récurrence sur la valuation dyadique de r : on commencera donc par construire $U_{1/2}$, puis $U_{1/4}$ et $U_{3/4}$, etc.)
5. Pour une telle famille $(U_r)_{r\in D}$, on définit une application $f : X \to [0,1]$ par :
$$f(x) = \inf\left(\{s \in D \mid x \in U_s\} \cup \{1\}\right) = \sup\left(\{r \in D \mid x \notin \overline{U_r}\} \cup \{0\}\right).$$
   (On pourra admettre la seconde égalité comme immédiate par construction.)
   Pour tout réel $\alpha \in]0,1[$, démontrer que
$$f^{-1}([0,\alpha[) = \cup_{s\in D, s<\alpha} U_s$$
   et admettre que (de même)
$$f^{-1}(]\alpha, 1]) = \cup_{r\in D, r>\alpha}(X \setminus \overline{U_r}).$$
6. En déduire que f est continue.
7. En déduire que si X est quasi-normal alors il vérifie le lemme d'Urysohn.

Deuxième partie HORS BARÈME : théorème de prolongement de Tietze

1. Démontrer que si X vérifie le théorème de prolongement de Tietze alors il est quasi-normal. (Indication : montrer d'abord que si F et G sont deux fermés disjoints, l'application $f : F \cup G \to [-1,1]$ qui vaut -1 sur F et 1 sur G est continue.)
2. Montrer que si X vérifie le lemme d'Urysohn alors, pour tout fermé F de X et toute application continue $f : F \to [-M, M]$, il existe une application continue $g_1 : X \to [-M/3, M/3]$ telle que
$$\forall x \in F \quad |f(x) - g_1(x)| \le \frac{2M}{3}.$$
3. En déduire que si X vérifie le lemme d'Urysohn alors il vérifie le théorème de prolongement de Tietze. On construira pour cela (par récurrence, à l'aide de la question précédente) une suite d'applications continues $g_k : X \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in F \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n M$$
   et
$$\forall x \in X \quad |g_k(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^k M/2.$$

Corrigé

Exercice : semi-continuité

1. Si f est continue alors pour tout ouvert O de $\overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X, en particulier pour tout O de la forme $[-\infty,\alpha[$ ou $]\alpha,+\infty]$, donc f est s.c.s. et s.c.i. Réciproquement, supposons que f est s.c.s. et s.c.i. Pour en déduire que f est continue, il suffit de prouver que $f^{-1}(O)$ est ouvert pour les O d'une *base d'ouverts* de $\overline{\mathbb{R}}$. On en connaît une : les parties de la forme $[-\infty,\alpha[$ ou $]\alpha,+\infty]$ ou $]\alpha,\beta[=]\alpha,+\infty]\cap[-\infty,\beta[$. Les $f^{-1}([-\infty,\alpha[)$ et les $f^{-1}(]\alpha,+\infty])$ sont des ouverts de X par hypothèse, donc les $f^{-1}(]\alpha,\beta[)=f^{-1}(]\alpha,+\infty])\cap f^{-1}([-\infty,\beta[)$ aussi, ce qui conclut.
2. Si 1_A est s.c.s. alors $X\setminus A=1_A([-\infty,1/2[)$ est un ouvert de X donc A est un fermé de X. Réciproquement, si A est fermé alors 1_A est s.c.s. puisque pour tout réel α, $1_A([-\infty,\alpha[)$ est ouvert car égal soit à $\varnothing$ (si $\alpha\le 0$), soit à $X\setminus A$ (si $0<\alpha\le 1$), soit à X (si $\alpha\ge 1$). De même, 1_A est s.c.i. si et seulement si A est ouvert, car $1_A(]\alpha,+\infty])$ est égal soit à X (si $\alpha<0$), soit à A (si $0\le\alpha<1$), soit à $\varnothing$ (si $\alpha\ge 1$).
3. Pour tout réel α, on a les équivalences $f(x)<\alpha\Leftrightarrow \inf_{i\in I} f_i(x)<\alpha\Leftrightarrow \exists i\in I, f_i(x)<\alpha$ donc l'égalité $f^{-1}([-\infty,\alpha[)=\cup_{i\in I}f_i^{-1}([-\infty,\alpha[)$, donc si les f_i sont s.c.s. alors f aussi car les $f^{-1}([-\infty,\alpha[)$ sont ouverts (comme réunions d'ouverts).

Problème, première partie : lemme d'Urysohn

1. Soient F et G deux fermés de X disjoints. Soit (par le lemme d'Urysohn) $f : X\to[0,1]$ continue valant 0 sur F et 1 sur G. Alors $U:=f^{-1}([0,1/2[)$ et $V:=f^{-1}(]1/2,1])$ sont disjoints et ouverts dans X (car $[0,1/2[$ et $]1/2,1]$ sont disjoints et ouverts dans $[0,1]$), $U\supset f^{-1}(\{0\})\supset F$ et $V\supset f^{-1}(\{1\})\supset G$.
2. Soient F et G deux fermés de X disjoints, non vides, d'un espace métrique (X,d). Les applications (de X dans $\mathbb{R}^+$) $x\mapsto d(x,F)$ et $x\mapsto d(x,G)$ sont continues, le lieu d'annulation de la première est F et celui de la seconde est G (donc elles ne s'annulent jamais simultanément). L'application $f : X\to[0,1], x\mapsto\frac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,G)}$ est donc bien définie, continue, et vaut 0 sur F et 1 sur G.
3. Supposons que X est quasi-normal et soit, dans X, F fermé $\subset O$ ouvert. Posons $G=X\setminus O$. Alors F et G sont deux fermés disjoints donc par hypothèse, il existe U,V ouverts disjoints tels que $F\subset U$ et $G\subset V$. Le fermé $X\setminus V$ contient U et est inclus dans O, donc $\overline{U}\subset O$.
Réciproquement si, dans X, pour tous F fermé $\subset O$ ouvert, il existe un ouvert U tel que $F\subset U$ et $\overline{U}\subset O$, montrons que X est quasi-normal. Soient F et G deux fermés disjoints. L'ouvert $O:=X\setminus G$ contient F donc par hypothèse, il existe un ouvert U tel que $F\subset U$ et $\overline{U}\subset O$. L'ouvert $V:=X\setminus\overline{U}$ contient alors G et est disjoint de U.
4. Supposons X quasi-normal et F fermé $\subset O$ ouvert, et construisons les U_r par récurrence sur la valuation dyadique de r c'est-à-dire sur l'entier $n>0$ tel que r soit le quotient d'un entier impair par 2^n. Pour $n=1$, $r=1/2$ et d'après la propriété de la question précédente, il existe bien un ouvert $U_{1/2}$ tel que $F\subset U_{1/2}\subset\overline{U_{1/2}}\subset O$. Supposons les U_s (vérifiant les inclusions demandées) construits pour tous les s de valuation $<n$ et construisons U_r pour $r=(2\ell+1)/2^n$, qui est compris entre $s:=\ell/2^{n-1}$ et $t:=(\ell+1)/2^{n-1}$. Si $s>0$ et $t<1$, la propriété de la question précédente appliquée à l'inclusion $\overline{U_s}\subset U_t$ (vraie par hypothèse de récurrence) fournit un ouvert U_r tel que $\overline{U_s}\subset U_r\subset\overline{U_r}\subset U_t$. Si $s=0$ (respectivement : si $t=1$), même raisonnement en remplaçant $\overline{U_s}$ par F (resp. U_t par O).
5. Pour tout $x\in X$, le réel $f(x)$ est dans $[0,1]$, comme borne inférieure d'une partie non vide de $[0,1]$. Il est $<\alpha$ si et seulement si au moins un élément de cette partie est $<\alpha(<1)$ donc s'il existe dans D des $s<\alpha$ tels que $x\in U_s$. On a donc bien $f^{-1}([0,\alpha[)=\cup_{s\in D,s<\alpha}U_s$.
6. D'après la question précédente, pour tous $\alpha,\beta\in]0,1[$, $f^{-1}([0,\beta[)$ et $f^{-1}(]\alpha,1])$ sont ouverts, donc aussi leur intersection $f^{-1}(]\alpha,\beta[)$. Or les$[0,\beta[$, $]\alpha,1]$ et $]\alpha,\beta[$ forment une base d'ouverts de $[0,1]$. Donc f est continue.

7. Supposons X quasi-normal et F, G fermés disjoints. Posons $O = X \setminus G$ (ouvert contenant F) et construisons $f : X \to [0,1]$ continue comme ci-dessus. Pour tout $x \in F$, $\{s \in D \mid x \in U_s\} \cup \{1\} =]0,1]$ donc $f(x) = 0$. Pour tout $x \in G$ c'est-à-dire $x \notin O$, $\{r \in D \mid x \notin \overline{U_r}\} \cup \{0\} = [0,1[$ donc $f(x) = 1$.

Problème, deuxième partie : théorème de prolongement de Tietze

1. Soient F et G deux fermés disjoints. L'application $f : F \cup G \to [-1,1]$ qui vaut -1 sur F et 1 sur G est continue car pour tout fermé (et même toute partie) H de $[-1,1]$, $f^{-1}(H)$ est égal à $\varnothing, F, G$ ou $F \cup G$, qui sont fermés dans $F \cup G$. Si X vérifie le théorème de prolongement de Tietze, il existe (puisque $F \cup G$ est fermé dans X) une application continue $g : X \to [-1,1]$ qui prolonge f. L'application $(1+g)/2 : X \to [0,1]$ est alors continue et vaut 0 sur F et 1 sur G.
2. Supposons que X vérifie le lemme d'Urysohn. Soient F fermé de X et $f : F \to [-M, M]$ continue. Soient $A_- = f^{-1}([-M, M/3])$ et $A_+ = f^{-1}([M/3, M])$. Ils sont disjoints et ce sont des fermés de F, donc aussi de X puisque F est fermé dans X. D'après le lemme d'Urysohn, il existe donc une application continue $g_0 : X \to [0,1]$ qui vaut 0 sur A_- et 1 sur A_+. L'application continue $g_1 := (2g_0 - 1)M/3 : X \to [-M/3, M/3]$ reste à distance $\leq 2M/3$ de f pour les $x \in F$ tels que $f(x) \in [-M/3, M/3]$, mais aussi pour les autres puisqu'elle vaut $-M/3$ sur A_- et $M/3$ sur A_+.
3. Pour $n = 0$, il suffit de constater que par hypothèse, $|f| \leq M$. Supposons les g_k construits pour $k < n$ et construisons g_n. Par hypothèse de récurrence, $f - \sum_{1 \leq k < n} g_k$ est continue sur F et à valeurs dans $[-M', M']$ pour $M' = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M$. D'après la question précédente, il existe donc une application continue $g_n : X \to [-M'/3, M'/3] = [-\left(\frac{2}{3}\right)^n M/2, \left(\frac{2}{3}\right)^n M/2]$ telle que sur F, $\left|\left(f - \sum_{1 \leq k < n} g_k\right) - g_n\right| \leq 2M'/3$ c'est-à-dire $\left|f - \sum_{1 \leq k \leq n} g_k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$. Sur X, la majoration des $|g_k|$ assure la convergence normale (donc uniforme) de la série des g_k, vers une fonction $g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ipso facto continue sur X et à valeurs dans $[-M, M]$. La majoration des $\left|f - \sum_{1 \leq k \leq n} g_k\right|$ sur F assure que g coïncide avec f sur F. On a donc bien prolongé f en une application continue $g : X \to [-M, M]$.

Chapitre 12

Feuilles d'exercices

12.1 TD1

Exercice 1 Dénombrabilité et intervalles réels
Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, disjoints deux à deux. On note U leur réunion. Montrer que l'application de $U\cap\mathbb{Q}$ dans I qui, à tout x, associe l'unique i tel que $x\in U_i$, est surjective. En déduire que I est au plus dénombrable.

Exercice 2 Suites et parties, finies ou quelconques, d'un ensemble dénombrable

1. Montrer que l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{N}$ (ou de n'importe quel ensemble dénombrable) est dénombrable pour tout entier $n>0$.
2. En déduire que l'ensemble des suites finies (de longueur quelconque) d'éléments de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
3. En déduire que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
4. Montrer que $\operatorname{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\geq\operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=\operatorname{card}(\mathbb{R})$. (Rappels : A^B désigne l'ensemble des applications de B dans A, et $\mathbb{R}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.)

Exercice 3 Cardinal et dimension de divers e.v. de suites

1. Établir, pour tous ensembles A,B,C, une bijection entre $(A^B)^C$ et $A^{B\times C}$. En appliquant ceci à $A=\{0,1\}$ et $B=C=\mathbb{N}$, en déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.
2. Comparer les cardinaux des ensembles suivants : $\mathbb{N}^{\mathbb{N}},\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathbb{N}^{\mathbb{R}},\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. On considère les s.e.v. suivants (emboîtés) du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles :
$$\text{si } 1\leq p<\infty,\quad \ell^p=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p<+\infty\},$$
$c_0=$ le s.e.v. des suites de limite nulle et $\ell^\infty=B(\mathbb{N},\mathbb{R})=$ le s.e.v. des suites bornées.Vérifier que pour tout réel $t>0$, la suite $x(t)$ définie par $x(t)_n=\mathrm{e}^{-tn}$ appartient à tous ces s.e.v.
4. On admettra (ou démontrera, en pensant aux matrices de Vandermonde) que la famille de suites $(x(t))_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ est libre. En déduire que tous les s.e.v. mentionnés sont de dimension au moins $\operatorname{card}(\mathbb{R})$.
5. En déduire tous ces espaces de suites sont à la fois de dimension et de cardinal $\operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Fonction lipschitzienne
Soient I un intervalle réel, $f:I\to\mathbb{R}$ et K l'ensemble des réels $k\geq 0$ tels que
$$\forall x,y\in I,\quad |f(y)-f(x)|\leq k|y-x|.$$
On dit que f est lipschitzienne si K est non vide.

1. Montrer que si f est lipschitzienne, alors K possède un plus petit élément.
2. On suppose f dérivable. Montrer que si f est lipschitzienne, alors f' est bornée.
3. Justifier la réciproque.

Exercice 5 Limite supérieure d'une suite réelle bornée
Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \sup_{k\geq n} x_k$.

1. Montrer que y est une suite de réels décroissante et minorée, donc convergente. On notera L sa limite (appelée la limite supérieure de x – on définirait de même sa limite inférieure, en remplaçant les sup par des inf).
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'indices n tels que $x_n > L - \varepsilon$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que $x_n > L + \varepsilon$.
4. Déduire des deux questions précédentes que L est une valeur d'adhérence de x, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'indices n tels que $|L - x_n| < \varepsilon$.
5. Déduire de la question 3 que pour tout $L' > L$, L' n'est pas une valeur d'adhérence de x (donc L est la plus grande).

Exercice 6 Définition d'une topologie
Quelles conditions doivent vérifier deux parties A et B de E pour que $\{\varnothing, A, B, E\}$ soit (l'ensemble des ouverts d')une topologie sur E ?

Exercice 7 Une topologie non usuelle sur $\mathbb{R}$
Soit $\mathcal{T} = \{]-x, x[\mid x \in [0, +\infty]\}$.

a. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un singleton $\{a\}$ puis d'un segment $[a, b]$.

Exercice 8 Ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^2$ (pour la topologie usuelle)
Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle, les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ?
$A = \{(1/n, y) \mid n \in \mathbb{N}^*, y \in [0, 1]\}$,
$B = \{(x, \arctan x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2/3 + y^2/5 < 2 \text{ et } y < 3 - x^4\}$.

Exercice 9 Adhérences et intérieurs dans $\mathbb{R}$ (pour la topologie usuelle)

1. Calculer les adhérences des parties suivantes, en admettant au besoin le théorème suivant qui sera démontré en cours : dans $\mathbb{R}$ – comme dans tout espace métrique – un point est adhérent à A si et seulement s'il est limite d'une suite d'éléments de A :
$]a, b[$ pour $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ (en distinguant les cas) ;
$A_x := \{x + 1/q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$ (pour $x \in \mathbb{R}$) et $\cup_{p\in\mathbb{N}^*} A_{1/p}$.
2. Soit $A =]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap]4, 5[)$. Calculer $B = \mathring{A}$, $C = \overline{A}$, $D = \overline{B}$, $E = \mathring{C}$, $\mathring{D}$ et $\overline{E}$ (vérifier qu'ils sont tous distincts).

Exercice 10 Adhérence relative
Soient X un espace topologique et Y une partie de X. Pour tout $A \subset Y$, notons $\overline{A}$ l'adhérence de A dans X et $\overline{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y (muni de la topologie induite). Montrer que

$$\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y.$$

12.2 TD2

Exercice 1 Transitivité de la densité
Soient E un espace topologique, A une partie dense de E, et B une partie de A dense pour la topologie induite sur A. Montrer que B est dense dans E.

Exercice 2 Singletons fermés

1. Montrer que dans un espace séparé, tout singleton est fermé.
2. Montrer que la topologie cofinie sur un ensemble infini, bien que non séparée, vérifie aussi cette propriété.

Exercice 3 Point d'accumulation d'une partie, valeur d'adhérence d'une suite Montrer que :

1. toute partie sans point d'accumulation est fermée, et sa topologie induite est discrète ;
2. dans un espace séparé, si a est un point d'accumulation de A, tout voisinage de a contient non seulement un point de A mais une infinité ;
3. toute valeur d'adhérence d'une suite injective est point d'accumulation de l'ensemble de ses termes ;
4. dans un espace séparé, tout point d'accumulation de l'ensemble des termes d'une suite est valeur d'adhérence de cette suite.

Exercice 4 Calculs de valeurs d'adhérence

1. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence, dans $\mathbb{R}$ puis $\overline{\mathbb{R}}$ des suites u, v, w :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = (-2)^n \text{ et } u_{2n+1} = \sqrt{2}, \quad v_n = e^{-n}, \quad w_{2n} = 1 \text{ et } w_{2n+1} = n.$$
2. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ de (u, v) et de (u, w). Que remarque-t-on ?

Exercice 5 Adhérence (et intérieur) d'une union et d'une intersection

1. Montrer que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ (pour deux parties A et B d'un espace topologique).
2. En déduire que $\cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}$ et montrer qu'il y a égalité lorsque I est fini.
3. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où cette inclusion est stricte.
4. Montrer que $\overline{\cap_{i\in I}A_i} \subset \cap_{i\in I}\overline{A_i}$ et donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ est stricte.
5. Écrire les résultats correspondants pour les intérieurs.

Exercice 6 Frontière d'une union

1. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$ et montrer qu'il y a égalité si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont disjoints.
2. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où cette inclusion est stricte.

Exercice 7 Axiomes de Kuratowski
Soient E un ensemble et α une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, telle que
$$\forall X, Y \subset E \ : \quad X \subset \alpha(X), \quad \alpha(\alpha(X)) = \alpha(X), \quad \alpha(X \cup Y) = \alpha(X) \cup \alpha(Y) \quad \text{et} \quad \alpha(\varnothing) = \varnothing.$$

1. Montrer que α est croissante (pour l'inclusion).
2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de E invariantes par α. Montrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie.

3. Montrer que α est l'application "adhérence" pour cette topologie.

Exercice 8 Intérieur et densité
Montrer qu'une partie d'un espace topologique est d'intérieur non vide si et seulement si elle rencontre toute partie dense.

Exercice 9 Borne inférieure

1. On définit la borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une partie B de $\overline{\mathbb{R}}$ comme le plus grand de ses minorants dans $\overline{\mathbb{R}}$. Que vaut-elle lorsque B est une partie de $\mathbb{R}$ non minorée ? une partie de $\mathbb{R}$ minorée et non vide ? l'ensemble vide ?
2. Soient f et g deux applications définies sur ensemble A et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. La borne inférieure de f se note indifféremment :

$$\inf f = \inf\{f(a) \mid a \in A\} = \inf_{a\in A} f(a)$$

(et de même pour g). Montrer que si $f \leq g$ alors $\inf f \leq \inf g$.

Exercice 10 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$
Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Notons $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

a. Montrer que si $\alpha > 0$ alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.
b. Montrer que si $\alpha = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
c. Décrire les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.
d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le sous-groupe $G = \mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11 Sous-groupes multiplicatifs du cercle unité

a. Quels sont les sous-groupes multiplicatifs non denses de $\mathbb{R}_+^*$? (Indication : regarder l'image par ln et utiliser l'exercice précédent). En déduire les sous-groupes multiplicatifs non denses de $\mathbb{R}^*$.
b. Montrer qu'un sous-groupe multiplicatif de $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est soit cyclique d'ordre fini, soit dense dans U. (Indication : utiliser l'application $x \mapsto \exp(\mathrm{i}x)$).
c. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

12.3 TD3

Exercice 1 Topologie produit
Soient X et Y deux espaces topologiques. Montrer que :

1. si X et Y sont séparés alors $X \times Y$ aussi ;
2. pour $A \subset X$ et $B \subset Y$, sur $A \times B$, le produit des topologies induites coïncide avec la topologie induite par celle du produit $X \times Y$.

Exercice 2 Continuité et bases
Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de Y. Montrer que f est continue si (et seulement si) pour tout $O \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(O)$ est ouvert.
2. Soient $a \in X$ et $\mathcal{F}$ une base de voisinages de $f(a)$. Montrer que f est continue au point a si (et seulement si) pour tout $V \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.

Exercice 3 Transitivité de la densité
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ continues, montrer que si f et g sont d'image dense alors $g \circ f$ aussi.

Exercice 4 Graphe fermé
Montrer par un contre-exemple de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que la réciproque du théorème suivant est fausse : pour toute application f d'un espace quelconque dans un espace séparé, si f est continue alors son graphe est fermé.

Exercice 5 Exemple d'espace où les suites ne donnent pas assez d'information
Soit un ensemble non dénombrable, muni de la topologie codédombrable : les ouverts sont $\varnothing$ et les parties codénombrables, c'est-à-dire de complémentaire au plus dénombrable. Montrer que

1. ceci définit bien une topologie (est-elle séparée ?) ;
2. les seules suites convergentes sont les suites stationnaires ;
3. toute partie non dénombrable est dense ;
4. cet espace n'est pas à bases dénombrables de voisinages ;
5. aucun point de cet espace n'est à base dénombrable de voisinages.

Exercice 6 Inclusions de boules
Dans un espace métrique, pour que $B(\omega, r) \subset B(\Omega, R)$,

1. montrer qu'il suffit que $r \leq R - d(\Omega, \omega)$;
2. en déduire qu'il suffit que $2r \leq R - d(\Omega, a)$ pour un certain $a \in B(\omega, r)$.

Exercice 7 Exemple d'espace métrique non séparable

1. Soit, pour tout entier naturel n, une suite réelle $x(n) = (x(n)_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe une suite bornée $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, |y_k - x(k)_k| \geq 1$.
2. En déduire que l'espace ℓ^∞ des suites bornées n'est pas séparable.

Exercice 8 Distance ultramétrique
Soit (E, d) un espace ultramétrique, c'est-à-dire un espace métrique dont la distance d vérifie la propriété suivante (plus forte que l'inégalité triangulaire) : $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$.

1. Soient $x, y, z \in E$. Montrer qu'au moins deux des trois nombres $d(x, y), d(y, z), d(z, x)$ sont égaux. Autrement dit : tout triangle est isocèle.
2. Montrer que $\forall r \geq d(x, y) > 0, B'(x, r) = B'(y, r)$ et $\forall r > d(x, y), B(x, r) = B(y, r)$. Autrement dit : tout point d'une boule est centre de cette boule.
3. En déduire que deux boules sont soit incluses l'une dans l'autre, soit disjointes.
4. Montrer que les boules $B(x, r)$ et $B'(x, r)$ sont à la fois ouvertes et fermées.
5. Montrer que *pour une telle distance*, une suite x est de Cauchy dès que $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. (Rappeler par un contre-exemple que c'est faux en général pour une distance non ultramétrique.)
6. (Facultatif.) Soit $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour tous $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et sinon, $d(x, y) = 2^{-k}$ où k est le plus petit indice pour lequel $x_k \neq y_k$. Montrer que (E, d) est un espace ultramétrique complet.

Exercice 9 Intérieur et adhérence des boules d'un e.v.n.
Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $B(a, r)$ et de $B'(a, r)$ sont ce à quoi l'on s'attend.

Exercice 10 Sup de fonctions Lipschitziennes Soient (E,d) un espace métrique, k un réel positif et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications k-Lipschitziennes de E dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $(f_i(a))_{i\in I}$ soit majorée. Montrer que pour tout $x \in E$, la famille $(f_i(x))_{i\in I}$ est majorée et que l'application $\sup_{i\in I} f_i$ est k-Lipschitzienne.

Exercice 11 Continuité uniforme de la fonction puissance

1. Soit $a > 1$. Montrer que $x \mapsto x^a$ est Lipschitzienne sur tout segment $[0, M]$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $a < 0$. Montrer que $x \mapsto x^a$ est Lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$ mais n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $a \in]0, 1]$. Montrer (ou admettre) que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, |x^a - y^a| \leq |x - y|^a$ et en déduire que $x \mapsto x^a$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12 Équivalences de distances.
Soit (E,d) un espace métrique ; on pose $d'(x,y) = \min(1,d)$ et $d'' = \frac{d}{1+d}$.

1. Montrer que d' et d'' sont des distances sur E et que d' est uniformément équivalente à d.
2. Montrer que d' et d'' sont Lipschitz-équivalentes.
3. En déduire que d'' est uniformément équivalente à d.
4. Montrer que si deux distances sont Lipschitz-équivalentes alors elles ont mêmes parties bornées.
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante simple – portant sur d – pour que d soit Lipschitz-équivalente à d' (ou d'').

Exercice 13 Transport d'une distance
Soient (E,d) un espace métrique, $\mathcal{T}$ sa topologie canonique, X un ensemble, $f : X \to E$ une injection et $Y = f(X)$, muni de la topologie $\mathcal{T}_Y$ induite par $\mathcal{T}$.

1. Vérifier qu'en posant $d'(x,y) = d(f(x), f(y))$, on définit une distance d' sur X.
2. On note $\mathcal{T}'$ la topologie associée à d'. Montrer que $f : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ est un homéomorphisme.
3. Qu'en déduit-on dans le cas $X \subset E$ et $f =$ l'injection canonique ?
4. et dans le cas où l'ensemble X était déjà muni d'une topologie $\mathcal{T}''$ et où f était un homéomorphisme de $(X, \mathcal{T}'')$ dans $(E, \mathcal{T})$?

Exercice 14 Équivalence et suites de Cauchy.
On note d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et $d_{]-1,1[}$ la distance induite sur $]-1,1[$ par restriction.

1. Soient $h : \mathbb{R} \to]-1,1[$ un homéomorphisme (par exemple : ?) et d' la distance sur $\mathbb{R}$ obtenue en transportant $d_{]-1,1[}$ par h. La distance d' est-elle topologiquement équivalente à d ? Quelles sont ses suites de Cauchy ?
2. Soient $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ et d'' la distance sur $\mathbb{R}$ obtenue en transportant d par k. Montrer que d'' a mêmes suites de Cauchy que d mais ne lui est pas uniformément équivalente.

Exercice 15 Suite de Cauchy.
Dans un espace métrique, soient A une partie d'adhérence complète et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy telle que $d(x_n, A) \to 0$. Montrer que la suite converge.

Exercice 16 Complétude d'un produit.
Montrer qu'un produit $X \times Y$ d'espaces métriques non vides est complet si et seulement si X et Y le sont.

Exercice 17 Comparaison de deux "distances ℓ^p" et complétés.
Sur l'e.v. ℓ^1 des suites réelles dont la série est absolument convergente, soient d_1 et d_∞ les distances associées aux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$.

1. Montrer que l'application identité est 1-lipschitzienne de (ℓ^1, d_1) dans (ℓ^1, d_∞).
2. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un $x \in \ell^1$ tel que $\|x\|_1 = 1$ et $\|x\|_\infty = 1/n$.
3. Qu'en déduit-on sur les topologies associées ?
4. Quel est le complété de ℓ^1 pour ces deux distances ?

12.4 TD4

Exercice 1 Réunions de parties complètes
Dans un espace métrique, montrer que :

1. la réunion d'une famille finie de parties complètes est complète ;
2. la réunion d'une famille infinie de parties complètes n'est pas toujours complète.

Exercice 2 Théorème du point fixe
Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continue, non identique à 1, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'équation fonctionnelle (E) d'inconnue $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$:

$$f'(x) = f(\varphi(x)), \qquad f(0) = \alpha.$$

Sur $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, soit T l'application affine définie par $T(f)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t))dt$. Montrer que ($T$ n'est pas contractante mais) T^2 est k-contractante, avec $k = \int_0^1 \varphi(t)dt$. En déduire que (E) possède une unique solution.

Exercice 3 Exemples classiques de compacts
Montrer que :

1. un espace fini séparé est compact ;
2. un espace discret est compact si et seulement s'il est fini ;
3. dans un espace séparé, étant donnée une suite convergente, l'ensemble constitué des termes de la suite ainsi que de la limite est compact.

Exercice 4 Dans un compact, toute suite a des valeurs d'adhérences
Redémontrer ce théorème "directement" (sans utiliser que dans un compact, toute partie infinie a des points d'accumulation), à partir de l'expression classique de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite comme intersection de fermés (cf. TD2, exercice 3).

Exercice 5 Somme de deux compacts ou de deux fermés de $\mathbb{R}$
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$; on note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A et B sont compacts alors $A + B$ aussi.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ est fermé.
3. Donner un exemple où A et B sont fermés mais pas $A + B$.

Exercice 6 Distance entre un compact et un fermé
Dans un espace métrique (E, d), soient deux parties disjointes non vides : F fermé et G compact. On note $d(F, G) = \inf\{d(x, y) \mid x \in F, y \in G\}$. Montrer que $d(F, G) > 0$.

Exercice 7 Compacts dans $\mathbb{R}^n$

À l'aide d'arguments élémentaires, dire si les espaces suivants sont compacts ou non (pour la topologie usuelle, tout espace de matrices $M_{p,q}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}^{pq}$).

1. La sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).
2. L'ensemble $S(q,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = \alpha\}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et q est une forme quadratique réelle de signature (r,s).
3. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
4. Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1.
5. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Caractérisation de la compacité par les projections fermées

Soient X et Y deux espaces topologiques, $X \times Y$ l'espace topologique produit, et $p : X \times Y \to Y$ la projection canonique.

1. Montrer que p est "ouverte", c'est-à-dire que l'image par p de tout ouvert de $X \times Y$ est un ouvert de Y.
2. Montrer que si X est compact alors p est aussi "fermée", c'est-à-dire que l'image par p de tout fermé de $X \times Y$ est un fermé de Y.
3. Déduire de 2. que si X est compact alors une application de Y dans X est continue si (et seulement si) son graphe est fermé.
4. Montrer par un contre-exemple que 3. devient faux en général (donc 2. aussi) quand X n'est pas compact, même si Y l'est (on pourra prendre $X = \mathbb{R}, Y = [0,1]$).
5. (Complément "culturel" et facultatif) Prouver la réciproque de 2., c'est-à-dire : si X est un espace séparé tel que pour tout Y, la projection $p : X \times Y \to Y$ est fermée, alors X est compact. Indications : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Poser $E =$ l'ensemble des parties de X qui sont des réunions d'un nombre fini de U_i. Poser $Y = X \cup \{\infty\}$ muni de la topologie donnée par la base d'ouverts $\mathcal{P}(X) \cup \{Y \setminus U \mid U \in E\}$. Soit $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$, montrer que le fermé $p(\overline{\Delta})$ est égal à X. En déduire que $X \in E$.

Exercice 9 Premier théorème de Dini et équicontinuité

1. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction continue. Montrer cette convergence est automatiquement uniforme.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un compact K et à valeurs dans un espace métrique (E,d). On suppose qu'en tout point $x \in K$, la suite $(f_n)_n$ est équicontinue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que
$$\forall y \in V, \forall n \in \mathbb{N}, d(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon.$$
Montrer que si $(f_n)_n$ converge simplement alors elle converge uniformément.
3. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur espace topologique X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction continue. Montrer que$(f_n)_n$ est équicontinue en tout point $x \in X$.
4. Retrouver grâce aux questions 2 et 3 le résultat de la question 1.

12.5 TD5

Exercice 1 Continuité et compacité, dans des espaces métriques
Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ injective telle que l'image par f de tout compact de E soit compacte. Montrer que f est continue. (Pour toute suite convergente dans E, $x_n \to a$, considérer l'ensemble $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ et la restriction-corestriction de f, de K dans $f(K)$.)

Exercice 2 Uniformité par compacité
Soient X, Y deux espaces topologiques, E un espace métrique et $f : X \times Y \to E$ une application continue. On suppose que Y est compact et on munit $C(Y,E)$ (l'ensemble des applications continues de Y dans E) de la distance de la convergence uniforme : $d_\infty(g,h) = \sup_{y \in Y} d(g(y), h(y))$. Montrer que l'application $F : X \to C(Y,E), x \mapsto f(x,\ )$ est continue.

Exercice 3 Point fixe dans un espace métrique compact
Soient (E,d) un espace métrique compact non vide et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

1. Montrer que f admet un (unique) point fixe (poser $g(x) = d(x, f(x))$).
2. Donner un exemple d'une telle situation, avec f non contractante.

Exercice 4 Intersections de compacts
Dans un espace topologique séparé E, soient $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts et $K = \cap_{i \in I} K_i$.

1. Montrer que tout ouvert Ω contenant K contient une intersection finie des K_i (c'est-à-dire qu'il existe une partie finie J de I telle que $\cap_{i \in J} K_i \subset \Omega$).
2. On suppose maintenant que E est compact et non vide. Soit $f : E \to E$ une application continue. On pose $H_0 = E$, $H_{n+1} = f(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H = \cap_{n \in \mathbb{N}} H_n$. Montrer que H est un compact non vide et que $f(H) \subset H$.
3. Pour tout ouvert O contenant $f(H)$, déduire de la question 1 (appliquée à $\Omega = f^{-1}(O)$) que O contient H.
4. En déduire que $H \subset f(H)$.
5. En déduire une nouvelle preuve de l'exercice précédent.

Exercice 5 Unions de connexes
Dans un espace topologique, soient $C_i (i \in I)$ des parties connexes et C leur réunion.

1. Montrer que si $\overline{C}_i \cap C_j \neq \varnothing$ alors $C_i \cup C_j$ est connexe.
2. On a vu en cours que pour que C soit connexe, il suffit que $\cap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$. En *déduire* que plus généralement, il suffit que l'un des C_i rencontre chacun des autres (on pourra poser $C_i' = C_i \cup C_{i_0}$).
3. Redémontrer grâce à ce critère que le produit de deux espaces connexes (que l'on pourra supposer non vides) est connexe.

Exercice 6 Exemples de connexes dans un e.v.n.
Soient E un espace vectoriel normé de dimension ≥ 2, et $S(E)$ sa sphère unité.

1. Montrer que $E^* := E \setminus \{0\}$ est connexe (par arcs).
2. En déduire que $S(E)$ aussi, et que la "couronne" $B(0,b) \setminus B'(0,a)$ aussi (pour $0 \leq a < b \leq +\infty$, avec par convention $B(0,+\infty) = E$).

3. Soit A une partie de E étoilée par rapport à 0 (i.e. t.q. $\forall x \in A, [0,x] \subset A$) et bornée, montrer que A^c est connexe par arcs.
4. Montrer que si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$. Montrer que $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à un disque fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 Connexité de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ (généralisations)

1. Montrer que pour deux points quelconques x et y du plan, il existe une famille $(\gamma_s)_{s\in\mathbb{R}}$ de chemins dans le plan de x à y, polygonaux, et tels que les $\gamma_s(]0,1[)$ soient disjoints deux à deux.
2. En déduire que pour toute partie au plus dénombrable D du plan, $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est connexe par arcs polygonaux.
3. Montrer de même que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est connexe par arcs C^∞.

Exercice 8 Connexité de $GL(\mathbb{C}^n)$

On munit $GL_n(\mathbb{C})$ de la topologie induite par une norme arbitraire sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{C}), \exists H(A,B)$ connexe inclus dans $GL_n(\mathbb{C})$ et contenant A, B (indication : poser $\varphi(z) = zA + (1-z)B$ et remarquer que $\det \circ \varphi$ est un polynôme). En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe (ou connexe par arcs, ce qui ici revient au même – pourquoi ?).

Exercice 9 Composantes connexes de $GL(\mathbb{R}^n)$

Pour la topologie induite par une norme arbitraire sur $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, on se propose de montrer que $GL^+(\mathbb{R}^n)$ (le groupe des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ de déterminant > 0) et $SL(\mathbb{R}^n)$ (ceux de déterminant 1) sont connexes par arcs.

1. Montrer que chacune de ces deux assertions peut se déduire de l'autre.
2. Qu'en déduira-t-on sur les composantes connexes (ou connexes par arcs) de $GL(\mathbb{R}^n)$?
3. Le cas $n = 1$ étant immédiat, on procède par récurrence : soit $n \geq 2$; on suppose que $SL(\mathbb{R}^{n-1})$ est connexe par arcs, on se donne un élément g de $SL(\mathbb{R}^n)$, et on cherche à le connecter à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, par un chemin dans $SL(\mathbb{R}^n)$. Décrire un tel chemin dans les trois cas suivants :
   (a) g fixe au moins un vecteur non nul (le compléter en une base et raisonner matriciellement, en utilisant l'hypothèse de récurrence).
   (b) g n'est pas une homothétie (choisir un vecteur e_1 tel que $e_2 := g(e_1)$ ne soit pas colinéaire à e_1 et construire un élément h de $SL(\mathbb{R}^n)$ tel que $h^{-1} \circ g$ fixe e_1 et h fixe au moins un vecteur non nul).
   (c) g est une homothétie (pour un h arbitraire dans $SL(\mathbb{R}^n)$ qui n'est pas une homothétie, remarquer que $h^{-1} \circ g$ n'en est pas une non plus).

Exercice 10 Courbe sinus du topologue

Montrer que l'adhérence de la partie suivante de $\mathbb{R}^2$ est (compacte et) connexe mais pas connexe par arcs ni localement connexe :

$$T = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \middle| \, x \in]0,1] \right\}.$$

Montrer que la réunion de $\overline{T}$ et du segment $[(0,1),(1,1)]$ est connexe par arcs mais non localement connexe.

12.6 TD6

Exercice 1 Le dual topologique de ℓ^1 est ℓ^∞
On note ℓ^1 l'espace $\ell^1(\mathbb{C})$, muni de sa norme usuelle ($\|a\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |a_n|$) et pour $k \in \mathbb{N}$, $\delta^{(k)}$ la suite définie par $\delta_k^{(k)} = 1$ et $\delta_n^{(k)} = 0$ si $n \neq k$.

1. Soit $u \in (\ell^1)' := \mathcal{L}(\ell^1, \mathbb{C})$ (dual topologique de ℓ^1).
   (a) Vérifier que la suite η définie par $\forall k \in \mathbb{N}\ \eta_k = u(\delta^{(k)})$ est bornée et que $\|\eta\|_\infty \leq \|\!|u|\!\|$.
   (b) Vérifier que $\forall a \in \ell^1\ \sum_{k=0}^\infty a_k \delta^{(k)} = a$ et en déduire que $\|\!|u|\!\| \leq \|\eta\|_\infty$.
2. Pour $u \in (\ell^1)'$ on pose $\Phi(u) = (u(\delta^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$.
   (a) Vérifier que l'on définit ainsi une application linéaire Φ de $(\ell^1)'$ dans $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
   (b) Vérifier que Φ est isométrique (i.e. $\|\Phi(u)\|_\infty = \|\!|u|\!\|$).
   (c) Montrer que Φ est surjective.

Exercice 2 E.v.n. quotient, application linéaire de noyau fermé
Soient E un espace vectoriel normé, G un sous-espace vectoriel et E/G l'espace vectoriel quotient (caractérisé par : il existe une surjection linéaire $p : E \to E/G$ de noyau G).

1. Montrer qu'il existe une (unique) application $N : E/G \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall x \in E\ N(p(x)) = d(x, G)$.
2. Montrer que N est une semi-norme sur E/G, et que c'est une norme si et seulement si G est fermé.
3. Montrer (par le critère sur les séries vu en cours) que si E est complet et G fermé alors E/G (que l'on suppose désormais muni de cette norme) est complet.
4. Soient F un autre e.v.n. et $f : E \to F$ une application linéaire de noyau fermé G.
   (a) Montrer par un contre-exemple que f n'est pas nécessairement continue (cf. TD3, ex. 10, avec même $G = \{0\}$).
   (b) Soit $\tilde{f} : E/G \to F$ l'unique application linéaire telle que $f = \tilde{f} \circ p$. Montrer que f est continue si et seulement si $\tilde{f}$ l'est.
   (c) En déduire qu'une application linéaire de rang fini est continue si (et seulement si) son noyau est fermé (rappel : $\mathrm{rang}(f) := \dim(\mathrm{im} f) = \dim(E/\ker f)$).

Exercice 3 Projection sur un convexe complet d'un espace préhilbertien
Soient E un espace préhilbertien réel, C une partie convexe non vide de E, $x \in E$ et $\delta = d(x, C)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = B'(x, \delta + 1/n) \cap C$. Montrer que $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ (utiliser l'identité du parallélogramme) et en déduire que si C est complet, alors il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, y) = \delta$.
2. Montrer que si un $y \in C$ vérifie $d(x, y) = \delta$, alors il vérifie
$$(*) \quad \forall z \in C\ \langle x - y, z - y\rangle \leq 0$$
(considérer pour cela les points du segment $[z, y]$).
3. Prouver la réciproque.
4. On suppose désormais que le convexe C est complet et l'on note P_C l'application de "projection sur C", qui à tout $x \in E$ associe l'unique $y \in C$ tel que $d(x, y) = d(x, C)$. (Clairement, $P_C \circ P_C = P_C$.) Déduire de $(*)$ que
$$\forall x_1, x_2 \in E, \langle P_C(x_1) - P_C(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|^2.$$

5. En déduire que P_C est 1-lipschitzienne.

Exercice 4 Adjoint d'un opérateur continu sur un Hilbert
Soient H un espace de Hilbert et $S, T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall x, y \in H$ $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$.
2. Pour $H = \ell^2$ et T défini par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, vérifier que $T \in \mathcal{L}(H)$ et déterminer T^*.
3. Montrer que $(T^*)^* = T$, $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ et $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$.
4. Montrer que $\ker(T^*) = (\mathrm{im}T)^\perp$ et $\overline{\mathrm{im}(T^*)} = (\ker T)^\perp$.

Exercice 5 Polynômes orthogonaux
Soit I intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$; on se donne une fonction continue $w : \overset{\circ}{I} \to]0, +\infty[$ (appelée fonction poids) ; on suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_a^b w(t)|t|^n \mathrm{d}t$ converge ; λ_w désigne la mesure de densité w sur I.
On note E l'espace des fonctions réelles continues sur I appartenant à $L^2(\lambda_w)$; E est muni du produit scalaire $(f|g)_w = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\mathrm{d}t$ et de la norme associée $\| \ \|_{2,w}$ (norme de moyenne quadratique pour λ_w). On notera $\mathcal{P}_n$ l'espace des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$, à coefficients réels, de degré $\leq n$ (on identifiera polynôme et fonction polynomiale associée).

1. Montrer qu'il existe une suite unique $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires (i.e. de coefficient dominant égal à 1), deux à deux orthogonaux pour $(.|.)_w$, tels que $\forall n$, $\deg p_n = n$ (penser à la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) ; ces polynômes p_n sont appelés les polynômes orthogonaux relatifs au poids w ; (la suite des polynômes normalisés $(p_n/\|p_n\|_{2,w})_n$ est une suite orthonormée de E).
2. Dans cette question, $I = [-1, 1]$ et $w \equiv 1$; on note L_n les polynômes orthogonaux sur I relatifs au poids $w \equiv 1$ (polynômes de Legendre). Déterminer L_0, L_1 et L_2.
3. Montrer que si I est borné, la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E, la famille $(p_n/\|p_n\|_{2,w})_n$ est une base hilbertienne de E.
4. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $q_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|f - q_n\|_{2,w} = dist(f, \mathcal{P}_n)(= \inf_{h\in\mathcal{P}_n} \|f - h\|_{2,w})$; (q_n est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f à l'ordre n).
   Montrer que si l'intervalle I est borné, alors $\lim_{n\to\infty} \|f - q_n\|_{2,w} = 0$; retrouver le résultat de la question 3 (i.e. la famille $(p_n/\|p_n\|_{2,w})_n$ est base hilbertienne de E).
5. Un autre exemple : $I = [-1, 1]$ et $w(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$; on pose pour $t \in]-1, 1[$, $\quad T_n(t) = \cos(n \arccos t)$; vérifier que T_n est un polynôme en t (poser $x = \arccos t$ et utiliser les formules d'Euler) ; montrer que
$$\langle T_n, T_k\rangle = \int_0^\pi \cos nx \cos kx \ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } n = k \end{cases} .$$
   (les T_n sont appelés polynômes de Tchebychev).

Chapitre 13

Bibliographie

(presqu'entièrement reprise du poly d'A. Cumenge)

Iain T. ADAMSON, *A General Topology Workbook*, Birkhäuser, 1995
(cours + exercices pour découvrir par soi-même la topologie générale)
Gustave CHOQUET, *Topologie*, Masson, 1969 – Dunod, 2000
(un grand classique, très clair) traduit en anglais
Gilles CHRISTOL, Anne COT et Charles MARLE, *Topologie*, Ellipses, 1997
Jean DIEUDONNÉ, *Éléments d'Analyse, tome I*, Gauthiers-Villars, 1972
(espaces métriques, espaces vectoriels normés, espaces de Hilbert ; encore un bon classique) version originale en anglais
Alain DUFRESNOY et Christine LAURENT-THIEBAUT, cours en ligne interactif :
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/enseignement/IMG/pdf/lc1.pdf`
et le mode d'emploi :
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/enseignement/IMG/pdf/modemploi-2.pdf`
Jean-Louis KRIVINE, *Logique et théorie axiomatiques*, polycopié de cours, 2009 :
`http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~krivine/articles/LTA-ens.pdf`
Jean-Pierre MARCO, *Analyse pour la licence*, Masson, 1998
(cours et exercices corrigés ; les exemples y constituent souvent de bons exercices simples)
Hervé QUEFFÉLEC, *Topologie*, Dunod, 2002, 4e éd. 2012
(cours et exercices corrigés ; la topologie et ses utilisations, cours richement illustré ; très utile pour les futurs agrégatifs)
Jean SAINT-RAYMOND, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*, Calvage et Mounet, 2007, preprint
(un "trois en un" relativement complet, d'un bon niveau licence)
Georges SKANDALIS, *Topologie et analyse*, coll. "Maths pour la licence", Dunod, 2001
(cours + exercices avec quelques indications de solutions ; bonne continuation du Liret-Martinais, *Analyse 2* du L2)
Yves SONNTAG, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1998
(cours pour l'enseignement à distance donc très, très détaillé)
O. Ya. VIRO, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaevet V. M. Kharlamov, *Elementary Topology, Problem Textbook*, AMS, 2008, version 2007 en ligne
Claude WAGSCHAL, *Topologie et analyse fonctionnelle*, coll. "Méthodes", Hermann, 1995
(très complet ; si vous cherchez un énoncé en topologie ou analyse fonctionnelle avec les hypothèses minimales, vous l'y trouverez sûrement !)