**Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III)** **Année universitaire**
**Département de mathématiques – L3 ESR** **2017-2018**
**U.E. Analyse Numérique**

# Feuille de TP3
# Interpolation, Intégration numérique

**Exercice 1.** Implémenter une interpolation de Lagrange
Programmer une fonction **Lagrange** qui prend en argument

1. un vecteur $X$ de réels distincts
2. un vecteur $Y$ de réels
3. un réel (ou un vecteur de réels) $t$

et qui renvoie l'évaluation au(x) point(s) $t$ du polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds $(X, Y)$. Pour cela on pourra au choix utiliser l'expression de ce polynôme :

1. dans la base canonique (en résolvant un système de Vandermonde)

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \quad \text{où} \quad \mathrm{Vander}(X) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

2. dans la base de Lagrange (en programmant une fonction **base_Lagrange(X,Y,i,t)** qui calcule en $t$ le i-eme polynômes de la base de Lagrange associée aux noeuds $(X, Y)$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} Y_i L_i(t), \quad \text{où} \quad L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - X_j}{X_i - X_j}.$$

3. sous la forme de Newton en programmant le calcul des différences divisées :

$$P(t) = Y[X_0] + \sum_{k=1}^{n} Y[X_0, \ldots, X_k](t - X_0) \ldots (t - X_k),$$
$$\text{où} \;\; Y[X_0, \ldots X_k] = \frac{Y[X_1, \ldots, X_k] - Y[X_0, \ldots, X_{k-1}]}{X_k - X_0}, \;\; Y[X_0] = Y_0.$$

**Exercice 2.** (Phénomène de Runge !) En utilisant la fonction **Lagrange** implémentée à l'exercice précédent,

1. calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction sin définie sur $[0, 2\pi]$ associée à $n+1$ points équidistants de $[0, 2\pi]$, avec $x_0 = 0$ et $x_n = 2\pi$ pour $n = 3, 4, 5, 6$. Le tracer en superposant les résultats pour les différentes valeurs de $n$. Tracer sur le même graphique la fonction sin.

2. faire de même avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5,5]$. Qu'observez-vous quand $n$ augmente ?
3. tracer enfin les polynômes d'interpolation obtenus en calculant le polyôme d'interpolation de Lagrange de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[-5,5]$ aux noeuds de Tchebychef, donnés par
$$\forall i = 0 \ldots n,\ x_i = 5\cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right).$$

**Exercice 3.** (Intégration numérique.. Mise en oeuvre...) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il est question, connaissent la valeur prise par $f$ en un nombre fini de points de l'intervalle $[a,b]$, de calculer une approximation de $I(f) = \int_a^b f(t)dt$. Pour cela on se donne une subdivison uniforme de $[a,b]$ : $a = x_0, \ldots, x_N = b$, on applique la relation de Chasles :
$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$$
et c'est l'intégrale sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ que l'on approche par une méthode d'intégration numérique.
On rappelle ici les méthodes d'intégration numérique suivantes, où on note $J_i$ l'approximation choisie pour $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$ :

$$\begin{aligned}
&\text{Rectangles à gauche :} && J_i = hf(x_i)\\
&\text{Point milieu :} && J_i = hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\\
&\text{Trapèzes :} && J_i = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).
\end{aligned}$$

1. Définir la fonction $\phi : x \mapsto \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et calculer son intégrale exacte $I(f)$ sur $[0,1]$.
2. Implémenter les fonctions **rectG**, **pointM**, **trap** qui prennent
   — en argument : la fonction $g$ à intégrer, le nombre N d'intervalles dans la subdivision et les bornes a et b de l'intégrale à approcher.
   — en sortie : J la valeur approchée de l'intégrale selon la méthode choisie.
3. Comparer les méthodes sur l'exemple de la fonction $\phi$. Pour cela, pour différentes valeurs $N = 50, 100, \ldots, 450, 500$, on applique la méthode numérique à $N$ intervalles, on calcule l'erreur $E_N$ grâce à la valeur exacte calculée à la question 1, et on trace en échelle logarithmique les trois courbes de $E_N$ en fonction de $N$. Qu'observez-vous ? En quoi cela illustre-t-il les théorèmes de convergences abordés en cours ?