Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) **Année universitaire**
Département de mathématiques – L3 ESR **2017-2018**
U.E. Analyse Numérique

Feuille de TP5
Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires.

Exercice 1. Approximation numérique des solutions de l'équation du pendule

On rappelle que l'on peut modéliser le mouvement d'un pendule pesant par l'angle θ qu'il fait avec la verticale et l'équation différentielle suivante

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta. \tag{1}$$

On rappelle que l'équation (1) est équivalente au système non linéaire d'EDOs d'ordre 1 suivant :

$$Y'(t) = F(Y(t)) \quad \text{où } Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \ \text{ et } F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Le pendule amorti (en ne négligeant plus les frottements) peut de la même manière être modélisé par l'EDO suivante :

$$Y'(t) = G(Y(t)) \quad \text{où } Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \ \text{ et } G : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \lambda y - \frac{g}{\ell}\sin(x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Pour étudier et illustrer la dynamique du pendule simple, du fait de la non-linéarité en sin, on est amené à faire une étude approchée des solutions de ce problème sur un intervalle de temps $[0, T]$. On définit pour cela une discrétisation temporelle uniforme de pas h $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ avec $t_n = nh$. Pour résoudre numériquement l'équation (2), on va programmer les méthodes d'Euler explicite et de Kunge-Kutta d'ordre 4 (notée RK4).

Mise en place des méthodes numériques On rappelle que, pour l'approximation numérique d'une EDO autonome

$$y'(t) = f(y(t)),\ t \geq 0, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d, \quad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$$

les schémas numériques d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 sont définis en calculant l'approximation y_n de $y(t_n)$ par :

Euler explicite	$y_0 = y_0,$	$y_{n+1} = y_n + hf(y_n).$
RK4	$y_0 = y_0,$	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4^n\right],$ $k_1^n = f(y_n),$ $k_2^n = f(y_n + \frac{h}{2}k_1^n),$ $k_3^n = f(y_n + \frac{h}{2}k_2^n),$ $k_4^n = f(y_n + hk_3^n).$

Précision des méthodes : ordre de convergence Une étude théorique des deux méthodes ci dessus (on définit pour cela les notions *d'ordre de consistance* et de *stabilité* des méthodes numériques) permet de démontrer que, si la fonction f qui régit l'EDO est suffisamment régulière, alors

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)| \leq Ch^p \sup_{0\leq t\leq T} \left|y^{(p+1)}(t)\right|. \tag{4}$$

Le plus petit tel entier p est appelé *ordre de convergence* de la méthode et l'on peut démontrer que la méthode d'Euler explicite est d'ordre 1 et la méthode RK4 d'ordre 4.

Implémentation des méthodes numériques : résolution approchée du problème du pendule Pour simplifier votre première implémentation de méthode numérique pour les EDOs, on vous propose un programme pour implémenter la méthode d'Euler explicite pour la résolution approchée du problème du pendule avec une donnée initiale $y_0 = (\theta_0, \theta_1)^T$, un pas de temps h et un temps final T. On considérera pour simplifier que $\frac{g}{\ell} = 1$.

```
function y=eulerE(y0,h,T)
 y=[y0]; yaux=y0;
N=floor(T/h);
for i=1:N
    yaux=yaux+h*f(yaux);
    y=[y yaux];
end
```

qui nécessite bien sûr la création de la fonction F :

```
function y=F(x)
y=[x(2);-sin(x(1))];
end
```

1. Tester la fonction eulerE pour les données numériques suivantes : $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 0.3$, $T = 10, h = 0.1$. Que renvoie-t-elle ? Comment peut-on l'utiliser pour illustrer la dynamique du pendule ?
2. Programmer une fonction RK4 qui implémente la méthode de RK4 appliquée au problème du pendule pour une donnée initiale $y_0 = (\theta_0, \theta_1)$, un pas de temps h et un temps final T. L'utiliser pour illustrer la dynamique du pendule.
3. Tracer l'évolution de l'énergie mécanique numérique $E_m = \frac{1}{2}\dot{\theta}_n^2 + 1 - \cos\theta_n$ en fonction du temps. Faire varier h, qu'observe-t-on ?
4. Adapter les schémas numériques utilisés pour résoudre de manière approchée le problème du pendule amorti (3).

Exercice 2 (TD7 ex2)**.** L'évolution au cours du temps de la concentration de certaines réactions chimiques peut être décrite par

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{1+t^2} y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{5}$$

1. Calculer la solution exacte du problème (5).
2. Écrire les méthodes d'Euler explicite et implicite pour la résolution numérique du problème (5).
3. Implémenter une fonction `eulerI` qui prend en argument y_0, h et T et renvoie le vecteur des y_n pour $n = 0$ à $N = \textbf{floor}(T/h)$. En posant $y_0 = 5, T = 50$ et $h = 0.5$, calculer les termes y_n donnés par les méthodes d'Euler explicite et implicite.
4. Tracer sur un même graphe les valeurs y_n, z_n et $y(t_n)$ calculés respectivement par les méthodes d'Euler explicite, implicite et pour la solution exacte. Recommencer pour $h = 0.05$ puis $h = 0.005$

Exercice 3 (TD7 ex4)**.** On conseilère l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{6}$$

où $\lambda > 0$ est fixé.

1. Calculer la solution exacte et la tracer.
2. Implémenter les méthodes d'Euler explicite et de Crank-Nicolson pour le problème (6) et tracer les solutions pour $y_0 = 2, \lambda = 1, h = 0.1$ et $T = 10$. On rappelle ci-dessous la méthode de Crank-Nicolson :
   Méthode de Crank-Nicolson : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$.
3. Que se passe-t-il à présent si $\lambda = 50$?