donc $f_{X+Y}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

De plus $f_{X+Y}(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ 0,5

d'où $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$

④ En utilisant le lemme de Borel Cantelli pour des ens indépendants $A_n = \{|X_n| \geq \varepsilon\}$ 0,5

On a $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0\} \iff \sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$

or $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n \leq -\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon)$

$= F_n(-\varepsilon) + [1 - F_n(-\varepsilon)]$ 0,5

et $\liminf A_n = \{\omega, \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad |X_n| < \varepsilon\}$

D'après le cours (X_n) converge vers 0 ps ssi 0,5

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\liminf A_n) = 1$

d'où le resultat. 0,5

Exercice n°3 :

(a) X et Y sont deux va indépendantes de loi de densité $\frac{1}{2}1\!\!1_{[-1,1]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

donc (X, Y) a pour densité $\frac{1}{4}1\!\!1_{[-1,1]^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ 0,5

Soit φ borélienne bornée, avec le thme de transfert

$$E[\varphi(X+Y)] = \int_{[0,1]^2} \varphi(x+y)\,\frac{dx\,dy}{4}$$ 0,5

On pose $s = x+y$ et on conserve x

$$E[\varphi(X+Y)] = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}\varphi(s)\, 1\!\!1_{[-1,1]}(x)\, 1\!\!1_{-1\leq s-x\leq 1}\, dx\, ds$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \varphi(s)\, 1\!\!1_{\max(-1;-1-s)\leq x\leq \min(1-s;1)}\, dx\, ds$$ 0,5

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \varphi(s)\,\left[\min[1-s,1] - \max[-1;-1-s]\right]_+ ds$$

donc X+Y a la loi de densité $\frac{1}{4}\left[\min(1-s,1) - \max[-1;-1-s]\right]_+ 1\!\!1_{[-2,2]}(s)$ 0,5
par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

(b) La transformée de Fourier de X est 0,5

$$\varphi_X(t) = E[e^{iXt}] = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{ixt}\,dx = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2t} = \frac{\sin(t)}{t},\ t\in\mathbb{R}^*$$

$\varphi_1(0) = 1$

La transformée de Fourier de X+Y est $t\longmapsto\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ car X et Y sont indépendantes 0,5

(c) La transformée de Fourier de X+Y est intégrable donc 0,5 d'après la formule d'inversion

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$$ 0,5

or $t\longmapsto\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ est paire

On a $S(\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} X_k(\omega)\right) 1\!\!1_{N(\omega)=n}$ 0,5

donc S est une variable aléatoire c limite dénombrable de fonction mesurables $\omega \mapsto \sum_{n=0}^{\Pi} \sum_{k=0}^{n} X_k(\omega) 1\!\!1_{N(\omega)=n}$.

De plus les fonctions mesurable $\sum_{n=0}^{\Pi}\sum_{k=0}^{n} X_k 1\!\!1_{N=n}$ sont à valeurs entière car les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et N le sont. 0,5

$E[s^S] = E\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(s^{\sum_{k=0}^{n} X_k}\right) 1\!\!1_{N=n}\right]$ 0,5

c ts les termes sont positifs nous pouvons intervertir les signes Σ et espérance

$G_X(s)=E(s^S) = \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[s^{\sum_{k=0}^{n} X_k} 1\!\!1_{N=n}\right]$ 0,5

Les va $X_1 \ldots X_n$, N sont mutuellement indépendants 0,5

donc les va $s^{X_1}, \ldots, s^{X_n}, 1\!\!1_{N=n}$ c image du vecteur précédent par des fonctions mesurables sont indépendantes et

$G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} E[s^{X_k}]\, \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_X(s)^n\, \mathbb{P}(N=n)$ 0,5

$G_X(s) = G_N[G_X(s)] \quad s\in]0,1[$ 0,5

(c) La fonction G est développable en série entière sur $\{z, |z|<1\}$

et $G_X(s) = 1-\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} s^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha}{n}\left[1-\frac{\alpha}{n-1}\right]\cdots[1-\alpha]}_{L_n(\alpha,n)} s^n$ 0,5

De plus $\lim_{s\to 1} G_X(s)=1$ donc $(L_n(\alpha,n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la loi de probabilité d'une va discrète. 0,5

(d) On remarque que $G_X(s) = 1-(1-s)^\alpha$

$G_N(s) = 1-(1-s)^\beta$

alors $G_S(s)=G_N(G_X(s)) = 1-[1-[1-(1-s)^\alpha]]^\beta = 1-(1-s)^{\alpha\beta}$

donc S suit une loi de Sibuya de paramètre $\alpha\beta$. 0,5

0,5

Un intervalle de confiance au niveau de confiance α de θ est $[\hat{\theta}_- ; \hat{\theta}_+]$.

(g) Les va $X_1 \ldots X_n$ étant indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ, le n uplet $X_1 \ldots X_n$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ donnée par 0.5

$$L_n(x_1, \ldots, x_n) = \lambda^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x_i) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i + n\log\lambda\right) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}$$

soit $L_n(x_1 \ldots x_n) = \exp\left[-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\log(\theta)\right] \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x_i)$ 0.5

Le modèle statistique est dominé par la mesure de Lebesgue sur $\prod_i [0,+\infty[^n$ de densité $L_n(x_1 \ldots x_n) = \exp -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\log(\theta)$

(h) Le critère score est 0.5 0.5

$$+\frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{n}{\theta}, \text{ il s'annule en } \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Sa dérivée est $-\frac{2}{\theta^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{n}{\theta^2}$ 0.5

En $\hat{\theta}$ la dérivée vaut $-\frac{2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{n}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2} = -\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} < 0$

donc l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $\overline{X_n}$.

Exercice n° 2 :

(a) On applique le théorème de convergence monotone à la fonction qui à ~~xs~~ fixé $s \xrightarrow{f(s,x)} s^x = \exp x \ln(s)$ 1

et à la mesure $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \delta_{(n)}(dx)$

$$\int f(s,x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n s^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int f(1,x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

(b) Nous ~~avons~~ ~~$\{S \in \mathbb{N}\} \supseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{$~~

Soit $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(S = k) =$

(c) La transformée de Laplace de X_1 est

$L_{X_1}(t) = E[\exp t X_1] = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, e^{tx}\, e^{-\lambda x}\, 1\!\!1_{x \geq 0}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ 0,5 pour $t < \lambda$

Elle est définie sur un voisinage de l'origine, donc

$E(X_1) = L'_{X_1}(0) = \frac{1}{\lambda}$ 0,5

$E(X_1^2) = L''_{X_1}(0) = \frac{2}{\lambda^2}$ et par suite $Var(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}$. 0,5

(d) D'après la loi forte des grands nombres, les X_i étant iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$

$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{ps} E(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \theta$ 0,5

On propose comme estimateur de θ $\overline{X}_n$ 0,5 Par linéarité de l'espérance

$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \theta$ donc $\overline{X}_n$ est sans biais 0,5

Son risque quadratique est

$Var(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} Var(X_1)$ car les X_i sont iid de même loi. 0,5

$Var(\overline{X}_n) = \frac{\theta^2}{n}$. 0,5

(e) En appliquant Bienaymé Tchebyshev

$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \theta| \geq t) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{t^2} = \frac{\theta^2}{nt^2}$ 0,5

Soit α proche de 1. On pose $t = \left(\frac{\theta^2}{n(1-\alpha)}\right)^{1/2}$

On a $\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \theta| \geq \frac{\theta}{\sqrt{n(1-\alpha)}}\right) \leq 1 - \alpha$

soit $\mathbb{P}\left[-\frac{\theta^2}{n(1-\alpha)} \leq (\overline{X}_n - \theta)^2 \leq \frac{\theta^2}{n(1-\alpha)}\right) \geq \alpha$ 0,5

Le polynôme d'inconnue θ

$\left[1 - \frac{1}{n(1-\alpha)}\right]\theta^2 - 2\overline{X}_n\theta + (\overline{X}_n)^2$ 0,5

a pour discriminant réduit $\Delta = (\overline{X}_n)^2 - (\overline{X}_n)^2\left[1 - \frac{1}{n(1-\alpha)}\right] = \frac{\overline{X}_n^2}{n(1-\alpha)}$

et racine $\hat{\theta}_+ = \frac{\overline{X}_n\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n(1-\alpha)}}\right]}{\left[1 - \frac{1}{n(1-\alpha)}\right]}$ 0,5 , $\hat{\theta}_- = \frac{\overline{X}_n\left[1 - \frac{1}{\sqrt{n(1-\alpha)}}\right]}{\left[1 - \frac{1}{n(1-\alpha)}\right]}$ 0,5

soit $\hat{\theta}_+ = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n(1-\alpha)}}}\overline{X}_n$; $\hat{\theta}_- = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n(1-\alpha)}}}\overline{X}_n$

(a) Les va $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendants, donc les va $(X_1, \dots, X_n)$ et X_{n+1} le sont aussi. 0,5
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ est une fonction continue 0,5 donc mesurable. Donc $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ est indépendante de X_{n+1}

(b) Pour $n = 1$ $n\overline{X}_n = X_1$ a pour loi la mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda e^{-\lambda x} 1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)$ 0,5 sur $\mathbb{R}$

Supposons que $n\overline{X}_n$ a pour loi la mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} 1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)$ sur $\mathbb{R}$

Les va $n\overline{X}_n$ et X_{n+1} sont indépendantes donc la loi du couple $(n\overline{X}_n, X_{n+1})$ a pour loi la mesure sur $\mathbb{R}^2$ de densité 0,5

$$\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda(x+y)} 1\!\!1_{]0,+\infty[^2}(x,y)$$

Soit Φ borelienne bornée, $(n+1)\overline{X}_{n+1} = n\overline{X}_n + X_{n+1}$ 0,5

$$E\left[\Phi[n\overline{X}_n + X_{n+1}]\right] = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x+y) \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda(x+y)} 1\!\!1_{]0,+\infty[^2}(x,y)\, dx\, dy$$

où nous avons utilisé le théorème de transport
Nous posons $s = x + y$ et nous conservons x

$$E\left[\Phi[(n+1)\overline{X}_{n+1}]\right] = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(s) \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} x^{n-1} 1\!\!1_{]0,+\infty[}(s) 1\!\!1_{]0,s[}(x)\, dx\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Phi(s) \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda s} s^n 1\!\!1_{]0,+\infty[}(s)\, ds$$

où nous avons intégré par rapport à x 0,5

Donc $(n+1)\overline{X}_{n+1}$ a pour loi la mesure de densité
$\frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda s} s^n 1\!\!1_{]0,+\infty[}(s)$ 0,5 Par récurrence sur n pour tt n, $n\overline{X}_n$ a pour loi la mesure de densité f_n.