Introduction au problème de Sturm-Liouville

Encadrant : F. Boyer [1], UPS

Introduction

Le but de ce projet est l'étude des problèmes aux limites de la forme

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}(x)\right) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

où les fonctions $p : [0,1] \to \mathbb{R}_*^+$ et $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont données et les inconnues sont : la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ (qu'on cherche non identiquement nulle !).

Ce type de problème apparaît très naturellement dans l'étude d'équations aux dérivées partielles de type *équation des ondes* ou *équation de la chaleur* que vous étudierez éventuellement en M1 et avec qui vous pourrez déjà faire connaissance au cours de ce projet. La connaissance précise des solutions est fondamentale dans certains domaines applicatifs.

Objectifs

Il s'agira tout d'abord de se convaincre que le problème (1) n'admet des solutions que pour certaines valeurs particulières du paramètre λ. Ces valeurs sont appelées **valeurs propres** du problème car avec un peu d'imagination le problème étudié peut se lire sous la forme $\mathcal{A}u = \lambda u$. On montrera que pour chaque valeur propre, il existe une unique fonction u associée (à constante multiplicative près).

On pourra commencer par étudier le cas où $p(x) = 1$ et $q(x) = 0$ ou les calculs sont explicites et où on rencontrera des objets que vous connaissez sûrement déjà.

Dans le cas général, les formules explicites ne sont plus disponibles et on se posera donc la question des méthodes de calcul approché de ces solutions (voir la figure ci-dessous). On pourra dans un premier temps utiliser et adapter les méthodes décrites dans le cours de **méthodes numériques pour les EDO** puis essayer de mettre en oeuvre (en Python) des méthodes plus appropriées et plus efficaces pour ce problème particulier.

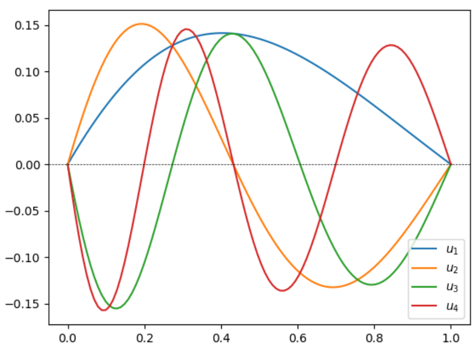

FIGURE 1: Les 4 premières fonctions propres du problème (1) pour $p(x) = 1 + x$ et $q(x) = x$

1. e-mail : franck.boyer@math.univ-toulouse.fr