Proposition de stage - L3 MAPI3 - Printemps 2020

Pseudo-spectre de matrices

Julien Royer

Institut de Mathématiques de Toulouse

Pour comprendre la solution d'un problème faisant intervenir une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, typiquement l'étude d'une équation différentielle telle que

$$u'(t) = Au(t), \tag{1}$$

il est très utile de connaitre le spectre de A. Par exemple, on peut vérifier qu'une solution de u tend vers 0 si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Cependant, la connaissance du spectre n'est pas toujours une information suffisante et il est pertinent de s'intéresser plus généralement au pseudo-spectre de A.

Une question à laquelle on voudrait répondre dans ce stage est la suivante. Étant donnée une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont on connait les valeurs propres, que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice de la forme

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon B,$$

où $\varepsilon > 0$ est petit et B est une matrice de taille 1 (pour une norme donnée sur $M_n(\mathbb{C})$) ? Sont-elles proches des valeurs propres de A ? À distance d'ordre ε ?

Le travail consistera à définir et donner les propriétés de base du pseudospectre d'une matrice, et d'illustrer numériquement cette définition sur des exemples. Cette partie numérique sera en particulier l'occasion de se demander comment on calcule numériquement les valeurs propres d'une matrice. On pourra éventuellement étendre l'étude à des exemples d'opérateurs plus généraux ($\simeq$ matrices de dimension infinie).

Pour cette étude on pourra s'appuyer sur les premiers paragraphes du livre [1].

Références

[1] L.N. Trefethen and M. Embree. Spectra and Pseudospectra, the behavior of Non-normal Matrices and Operators. Princeton University Press.