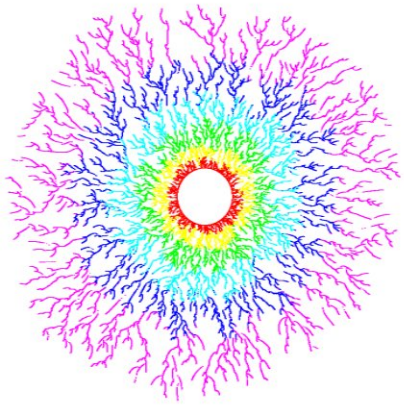
Projet intégrateur: Aspects théoriques et numériques de la croissance conforme.

CHHAIBI Reda *



Présentation du sujet : Considérons le disque unité

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

et soit $\xi : \mathbb{R}_+ \to \partial\mathbb{D}$ un chemin à valeur dans le cercle $\partial\mathbb{D}$. La chaine de Loewner $g = (g_t \ ; \ t \geq 0)$ pilotée par ξ est la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t(z)}{\partial t} & = & g_t(z)\frac{\xi_t + g_t(z)}{\xi_t - g_t(z)} , \\ g_0(z) & = & z \ . \end{cases} \tag{1}$$

Ici, $z \in \mathbb{D}$ est la condition initiale considérée comme un paramètre.

Le but de ce sujet consiste essentiellement en l'étude numérique et qualitative de cette EDO, pour les $z \in \mathbb{D}$ dans un maillage du disque et pour certains ξ simples, de préférence aléatoires.

On peut démontrer que la famille de domaines $K_t := g_t(\mathbb{D})$ forment une suite croissante de domaines compacts :

$$\forall s < t, \ K_s \subset K_t \ ,$$

avec $K_0 = \mathbb{D}$. Cela donne une façon d'encoder la croissance d'un domaine, et $g_t(\xi_t)$ joue le role de point de croissance à l'instant t. De plus, la dépendance en $z \in \mathbb{D}$ est holomorphe, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz dans sa version à paramètre. Ainsi ce type de dynamique est grossièrement qualifié de "croissance conforme".

La première photo ci-dessus est obtenue en dessinant la suite de compacts $(K_t = g_t(\mathbb{D}) \ ; t \geq 0)$ avec un ξ constant par morceaux, la couleur indiquant l'écoulement du temps. Du point de vue de la modélisation, ce genre de comportements est observé dans de nombreux systèmes : dépots

*reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

minéraux, aggrégations, électro-déposition et décharges électriques. Voir [DLA] pour plus de détails.

Une attention particulière devra être accordée à la visualisation de tels modèles de croissance conforme. L'étudiant pourra notamment s'inspirer des pages web d'Amanda Turner [T] et de Vincent Beffara [B], très riches en ressources.

Les élèves montrant plus d'aisance envisageront les croissances de type Loewner-Kufarev où le point de croissance ξ est remplacé par des points multiples, voire une mesure.

Outils :

Notions classiques du calcul des probabilités : lois et variables aléatoires.

Méthodes numériques pour la résolution d'équations différentielles (Schéma d'Euler, Runge-Kutta).

Codes numériques en Python et visualisation avec matplotlib.

Pour votre culture :

Historiquement, les chaines de Loewner ont été introduites en 1923 pour résoudre la conjecture de Bieberbach [L]. Et elles ont en effet joué un role important dans la preuve finalement donnée par Louis de Branges en 1985. Un regain d'intérêt pour le sujet est dû à la définition des SLE (Schramm-Loewner Evolutions) [SLE], comme candidat naturel aux limites d'échelle de modèles de physique statistique comme le modèle d'Ising pour le ferromagnétisme.

Références

[B] V. Beffara. `http://vbeffara.perso.math.cnrs.fr/simulations.html`

[DLA] Modèle DLA. `https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion-limited_aggregation`

[L] Loewner differential equation. `https://en.wikipedia.org/wiki/Loewner_differential_equation`

[SLE] Schramm-Loewner evolution. `https://en.wikipedia.org/wiki/Schramm%E2%80%93Loewner_evolution`

[T] Amanda Turner. `https://www.maths.lancs.ac.uk/~turnera/simulations.html`